Механика сплошной среды

Задания для желающих добрать баллы

Задание 1. Дано:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = 2\underline{\boldsymbol{i}}_2 + \underline{\boldsymbol{i}}_3,\ \underline{\boldsymbol{b}} = 2\underline{\boldsymbol{i}}_1 + \underline{\boldsymbol{i}}_2,$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_1 + 2\underline{\boldsymbol{i}}_1\underline{\boldsymbol{i}}_2 + \underline{\boldsymbol{i}}_3\underline{\boldsymbol{i}}_2,\ \underline{\underline{\mathbf{B}}} = 2\underline{\boldsymbol{i}}_2\underline{\boldsymbol{i}}_2 + \underline{\boldsymbol{i}}_2\underline{\boldsymbol{i}}_3 + \underline{\boldsymbol{i}}_3\underline{\boldsymbol{i}}_1.$$

Вычислить

$$\underline{\boldsymbol{a}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}) \cdot \underline{\boldsymbol{b}}.$$

Задание 2. Линейную функцию $l(\underline{\underline{\mathbf{X}}})$ записать в виде полного умножения на тензор:

$$l(\underline{\underline{\mathbf{X}}}) = \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$$

Задание 3. Доказать тождество

$$\mathrm{tr}(\underline{\underline{\mathbf{P}}} \times \underline{\boldsymbol{a}}) = \mathrm{tr}(\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\underline{\mathbf{P}}})$$

Задание 4. Найти главные инварианты тензора

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = (\underline{\underline{\mathbf{E}}} \times \underline{\boldsymbol{a}})^2$$

Задание 5. Даны два векторных поля $\underline{\boldsymbol{u}}$ и $\underline{\boldsymbol{v}}$, заданные своими компонентами в декартовых координатах:

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \sin X_1\underline{\boldsymbol{i}}_1 + \cos X_2\underline{\boldsymbol{i}}_2, \quad \underline{\boldsymbol{v}} = X_2\underline{\boldsymbol{i}}_1 + \sqrt{X_3}\underline{\boldsymbol{i}}_3$$

.

Вычислить:

$$\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{v}}),\ \ \nabla(\underline{\boldsymbol{u}} \cdot \underline{\boldsymbol{v}}),\ \ \nabla \times (\underline{\boldsymbol{u}} \times \underline{\boldsymbol{v}})$$

Задание 6. Найдите производную тензорной функции, аргумент которой является тензором второго ранга (векторы $\underline{\boldsymbol{a}}$ и $\underline{\boldsymbol{b}}$ – постоянные):

$$f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$$