Программа повышения квалификации «Искусственный интеллект: математические модели и прикладные решения»

Дисциплина

Избранные вопросы теории вероятностей и математической статистики

тема

Модель вероятностного эксперимента, условные вероятности

Практическое занятие

(Богачев Т.В., к.ф.-м.н., доц. каф. ФиПМ РГЭУ (РИНХ))

Рассмотрим различные задачи на применение основных формул классической вероятности. Также обратим внимание на возможность использования программных средств, таких как Maxima и Python для того, чтобы показать возможности вероятностного эксперимента даже в этих, не очнеь сложных, случаях.

Пример 1. Определить вероятность того, что партия из тридцати изделий, среди которых пять бракованных, будет принята при испытании наудачу выбранной половины всей партии, если условиями приёма допускается бракованных изделий не более одного из пятнадцати.

1-е решение.

Исходами опыта являются всевозможные сочетания из 30 элементов по 15. Согласно формуле (2.2) число всех исходов опыта равно $n = C_{30}^{15}$. Введём случайные события:

A – все пятнадцать выбранных изделий не являются бракованными;

B – из пятнадцати выбранных изделий ровно одно окажется бракованным;

C – бракованных изделий окажется не более одного из пятнадцати выбранных.

По условию имеет место равенство событий: $C = A + B$. Так как события A и B несовместны, то в силу упрощённой теоремы сложения вероятностей получаем: $P(C) = P(A) + P(B)$. Вероятности событий A и B подсчитаем, исходя из классического определения.

Пользуясь формулой (2.2), получаем, что число исходов, благоприятствующих событию A, равно $m_1 = C_{25}^{15}$. Поэтому

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_{25}^{15}}{C_{30}^{15}} = \frac{\frac{25!}{5!\cdot 20!}}{\frac{30!}{15!\cdot 15!}} = \frac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30} = \frac{11}{522}\ .$$

Согласно основному правилу комбинаторики (см. формулу (2.4)) число исходов, благоприятствующих событию B, равно $m_2 = C_{25}^{14} \cdot C_5^1$. Поэтому

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_{25}^{14} \cdot C_5^1}{C_{30}^{15}} = \frac{\frac{25!}{11! \cdot 14!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot 4!}}{\frac{30!}{5! \cdot 15!}} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{25}{174} .$$

Следовательно,

$$P(C) = \frac{11}{522} + \frac{25}{174} \approx 0{,}16475.$$

2-е решение (математический эксперимент)

С помощью генератора случайных чисел в Maxima будем выбирать из данной партии пятнадцать изделий. Проверяя, содержит ли каждый такой набор хотя бы одно бракованное изделие, получим:

```
B:setify (makelist(n,n,1,5))$
N:1000000$ N1:0$ N2:0$
for k:1 thru N   do (a[1]:random(30)+1,
  S:set(a[1]),
  for i:2 thru 15   do
    (a[i]:random(30)+1, S:adjoin(a[i],S)),
     if cardinality(S)=15 then(N1:N1+1,
      if cardinality(intersect(S,B))<=1 then
       N2:N2+1));
float(N2/N1);
done
0.16270875907265
```

Пример 2. Студент не успел выучить все вопросы экзаменационной программы. Каким по порядку, первым или вторым, ему следует заходить на экзамен, чтобы вероятность того, что ему достанется выученный вопрос, была большей? (Предполагается, что каждый студент берёт наугад один вопрос.)

1-е решение.

Пусть в программе всего n вопросов и студент успел выучить m из них $(1 \le m < n)$. Если он зайдет первым, то вероятность того, что ему достанется выученный им вопрос, равна $p = \frac{m}{n}$.

Пусть теперь наш студент заходит вторым. Введем события:

H_1 – студенту, зашедшему перед ним, достался вопрос, выученный нашим студентом;

H_2 – студенту, зашедшему перед ним, достался вопрос, не выученный нашим студентом;

A – нашему студенту достанется выученный им вопрос.

Так как H_1 и H_2 – гипотезы, то по формуле полной вероятности получаем:

$$P(A) = P(H_1)P\left(A/H_1\right) + P(H_2)P\left(A/H_2\right).$$

$$P(H_1) = \frac{m}{n}, \quad P(H_2) = \frac{n-m}{n} \quad \textbf{и} \quad P\left(A/H_1\right) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P\left(A/H_2\right) = \frac{m}{n-1}.$$

Производя упрощения в среде Maxima , получим:

P(A)=factor(m/n*(m-1)/(n-1)+(n-m)/n*m/(n-1));

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Итак, вероятность того, что студенту, зашедшему вторым, достанется выученный им вопрос, оказывается такой же, как и в случае, когда он заходит первым.

Проведём теперь соответствующие статистические испытания.

2-е решение (математический эксперимент)

Пусть, например, экзаменационная программа состоит из 10 вопросов, и студент успел выучить из них 9 вопросов. Получим в Maxima относительную частоту события, заключающегося в том, что студент успешно сдал экзамен, заходя вторым.

```
N:100000$
N1:0$ N2:0$
for k:1 thru N do
(x1:random(10)+1, x2:random(9)+1,
if x1<=9 then (if x2<=8 then N1:N1+1) else N1:N1+1, N2:N2+1)$
float(N1/N2);
```

0.90077

Пример 3. В 1-й урне находились m_1 белых и n_1 чёрных шаров, во 2-й – m_2 белых и n_2 чёрных шаров. Из 1-й урны наугад вынули один шар и, не обратив внимания на его цвет, переложили во 2-ю. Затем все шары во 2-й урне тщательно перемешали. Какова вероятность того, что вынутые из неё наугад два шара, окажутся разного цвета?

1-е решение.

Введём события:

H_1 – переложенный во 2-ю урну шар окажется белого цвета;

H_2 – переложенный во 2-ю урну шар окажется чёрного цвета;

A – два шара, вынутые из 2-й урны, окажутся разного цвета.

Тогда H_1 и H_2 – гипотезы, причём

$$P(H_1)=\frac{m_1}{m_1+n_1} \quad \text{и} \quad P(H_2)=\frac{n_1}{m_1+n_1} \ .$$

После перекладывания во 2-й урне станет всего m_2+n_2+1 шаров. Если произошла гипотеза H_1, то белых шаров в ней окажется m_2+1, если – H_2, то их число не изменится. При извлечении двух шаров из 2-й урны всего имеется $C^2_{m_2+n_2+1}$ исходов. Из них благоприятствующими событию А будут $(m_2+1)\cdot n_2$ исходов, если произошла гипотеза H_1 (Действительно, согласно основному правилу комбинаторики число белых шаров, находящихся в этом случае во 2-й урне, нужно умножить на число находящихся в ней чёрных шаров.) Если же произошла гипотеза H_2, то благоприятствующими событию А будут $m_2\cdot(n_2+1)$ исходов. Поэтому

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{(m_2+1)\cdot n_2}{C^2_{m_2+n_2+1}}\ ,\qquad P\left(A/H_2\right)=\frac{m_2\cdot(n_2+1)}{C^2_{m_2+n_2+1}}\ .$$

Следовательно, по формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{m_1}{m_1+n_1}\cdot\frac{(m_2+1)n_2}{C^2_{m_2+n_2+1}}+\frac{n_1}{m_1+n_1}\cdot\frac{m_2(n_2+1)}{C^2_{m_2+n_2+1}}.$$

Отсюда посредством Maxima получим:

```
P(A)=factor(m1/(m1+n1)*(m2+1)*n2/binomial(m2+n2+1, 2)+n1/(m1+n1)*m2*(n2+1)/binomial (m2+n2+1, 2));
```

$$P(A)=\frac{2\left(m2\ n1\ n2\ +m1\ m2\ n2\ +m1\ n2\ +m2\ n1\right)}{(n1+m1)(n2+m2)(n2+m2+1)}$$

Например, если $m_1=5$, $n_1=6$, $m_2=7$ **и** $n_2=8$, **то**

$$P(A)=\frac{349}{660}\approx 0,5287\ .$$

2-е решение (математический эксперимент).

Проведём для указанных выше значений m_1, n_1, m_2 и n_2 соответствующие статистические испытания.

Пользуясь Maxima , получим:

```
N:500000$
N2:0$
 for k:1 thru N   do
  (a1:random(11), a2:random(16),a3:random(15),
  if a1<5 then (if a2<8 then (
   if a3>6 then N2:N2+1)
   else (if a3<8 then N2:N2+1)  )
   else (if a2<7 then (if a3>5 then  N2:N2+1)
   else (if a3<7 then  N2:N2+1)));
N2;
N2/N;
float(N2/N);
done
264426
132213/250000
0.528852
```

Аналогичное решение в **Python** имеет вид:

```
import random
m1=5
n1=6
m2=7
n2=8
N=500000
N2=0
for i in range(N):
    a1=random.randint(0,11)
    a2=random.randint(0,16)
    a3=random.randint(0,15)

    if a1<m1 and a2<n2 and a3>n1:
        N2+=1
    elif a1<m1 and a2>=n2 and a3<n2:
        N2+=1
    elif a1>=m1 and a2<m2 and a3>m1:
        N2+=1
    elif a1>=m1 and a2>=m2 and a3<m2:
        N2+=1
print(N2)
print(N2/N)
```

```
260376
260376 500000
0.520752
```

Задачи для самостоятельного решения

1. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найдите вероятность того, что он:

а) промахнется все 3 раза;

б) попадет хотя бы один раз;

в) попадет 2 раза.

2. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0,9; на третий – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить:

а) на все вопросы;

б) хотя бы на 2 вопроса.

3. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один из сигнализаторов.

4. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

5. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая деталь с конвейера оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

6. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием К, 30% – с заболеванием L, 20% – с заболеванием М. Вероятность полного излечения события К равна 0,7; для болезней L и М эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.