Механика сплошной среды

Задания к индивидуальной работе

Задание 1. Докажите изотропность функции двух векторных аргументов:

1.1. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\left(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{y}}\right)\underline{\boldsymbol{x}}$

1.2. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\left(\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\underline{\boldsymbol{y}}\right)\underline{\boldsymbol{y}}$

1.3. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\left(\underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{y}}\right)\cdot\underline{\boldsymbol{x}}$

1.4. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\underline{\boldsymbol{x}}\cdot\left(\underline{\boldsymbol{x}}+\underline{\boldsymbol{y}}\right)$

1.5. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\underline{\boldsymbol{x}}\underline{\boldsymbol{y}}$

1.6. $f\left(\underline{\boldsymbol{x}},\underline{\boldsymbol{y}}\right)=\underline{\boldsymbol{y}}\underline{\boldsymbol{x}}$

Задание 2. Докажите изотропность функции, аргументы которой являются тензорами второго ранга:

2.1. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\underline{\underline{\mathbf{X}}}+2\underline{\underline{\mathbf{Y}}}^{\mathrm{T}}+\underline{\underline{\mathbf{X}}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{Y}}}^{2}$

2.2. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}-2\underline{\underline{\mathbf{Y}}}+\underline{\underline{\mathbf{Y}}}^{2}\cdot\underline{\underline{\mathbf{X}}}$

2.3. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\odot\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$

2.4. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\left(\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\odot\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)\underline{\underline{\mathbf{X}}}$

2.5. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\cdot\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}+\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)\cdot\underline{\underline{\mathbf{X}}}$

2.6. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}},\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)=\underline{\underline{\mathbf{X}}}\cdot\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}-\underline{\underline{\mathbf{Y}}}\right)\cdot\underline{\underline{\mathbf{Y}}}$

Задание 3. Найдите производную тензорной функции, аргумент которой является тензором второго ранга:

3.1. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}^{2}\left(\cos\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

3.2. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}^{2}\left(\sin\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

3.3. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}^{2}\left(\ln\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

3.4. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}^{2}\left(\exp\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

3.5. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}\left(\cos 3\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

3.6. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\mathrm{tr}\left(\sin 4\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

Задание 4. Найдите производную тензорной функции, аргумент которой является тензором второго ранга:

4.1. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\cos\left(\mathrm{tr}^{2}\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

4.2. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\sin\left(\mathrm{tr}^{2}\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

4.3. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\ln\left(\mathrm{tr}^{2}\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

4.4. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\exp\left(\mathrm{tr}^{2}\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)$

4.5. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\cos\left[\mathrm{tr}(3\underline{\underline{\mathbf{X}}})\right]$

4.6. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right)=\sin\left[\mathrm{tr}(4\underline{\underline{\mathbf{X}}})\right]$

Задание 5. Найдите производную тензорной функции, аргумент которой является тензором второго ранга (векторы $\underline{\boldsymbol{a}}$ и $\underline{\boldsymbol{b}}$ – постоянные):

5.1. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}}$

5.2. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}$

5.3. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{X}}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$

5.4. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\underline{\mathbf{X}}}$

5.5. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{X}}} \times \underline{\boldsymbol{b}}$

5.6. $f\left(\underline{\underline{\mathbf{X}}}\right) = \underline{\boldsymbol{a}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\boldsymbol{b}}$

Задание 6. Найдите градиент, дивергенцию и ротор векторной функции $\underline{\boldsymbol{u}}$, заданной своими компонентами в декартовых координатах:

6.1. $\underline{\boldsymbol{u}} = (X_1^2 + \sin X_2)\,\underline{\boldsymbol{i}}_1 + (X_2^2 + \sin X_3)\,\underline{\boldsymbol{i}}_2 + (X_3^2 + \sin X_1)\,\underline{\boldsymbol{i}}_3$

6.2. $\underline{\boldsymbol{u}} = \left(X_1 + \sin^2 X_2\right)\underline{\boldsymbol{i}}_1 + \left(X_2 + \sin^2 X_3\right)\underline{\boldsymbol{i}}_2 + \left(X_3 + \sin^2 X_1\right)\underline{\boldsymbol{i}}_3$

6.3. $\underline{\boldsymbol{u}} = (X_1^2 + \cos X_2)\,\underline{\boldsymbol{i}}_1 + (X_2^2 + \cos X_3)\,\underline{\boldsymbol{i}}_2 + (X_3^2 + \cos X_1)\,\underline{\boldsymbol{i}}_3$

6.4. $\underline{\boldsymbol{u}} = (X_1 + \cos^2 X_2)\,\underline{\boldsymbol{i}}_1 + (X_2 + \cos^2 X_3)\,\underline{\boldsymbol{i}}_2 + (X_3 + \cos^2 X_1)\,\underline{\boldsymbol{i}}_3$

6.5. $\underline{\boldsymbol{u}} = [X_1 + \sin(X_2 - X_3)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_1 + [X_2 + \sin(X_3 - X_1)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_2 + [X_3 + \sin(X_1 - X_2)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_3$

6.6. $\underline{\boldsymbol{u}} = [X_1 + \cos(X_2 - X_3)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_1 + [X_2 + \cos(X_3 - X_1)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_2 + [X_3 + \cos(X_1 - X_2)]\,\underline{\boldsymbol{i}}_3$

Задание 7. Докажите тождество ($\underline{\boldsymbol{R}} = X_k i_k$, $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ – единичный тензор):

7.1. $\nabla \times (\underline{\boldsymbol{u}} \times \underline{\boldsymbol{R}}) = \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{u}} - \underline{\boldsymbol{R}}(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{u}}) + 2\underline{\boldsymbol{u}}$

7.2. $\nabla \cdot \left[(\underline{\underline{\mathbf{E}}} \times \underline{\boldsymbol{u}}) \times \underline{\boldsymbol{R}}\right] = 2\underline{\boldsymbol{u}} + (\nabla \times \underline{\boldsymbol{u}}) \times \underline{\boldsymbol{R}}$

7.3. $\mathrm{tr}\left[\nabla \times (\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}})\right] = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\mathrm{T}} \odot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{A}}}) - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \odot (\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{\mathrm{T}})$

7.4. $\mathrm{tr}\left[\nabla \times (\underline{\boldsymbol{u}} \times \underline{\underline{\mathbf{E}}})\right] = -2\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{u}}$

7.5. $\nabla \times (\underline{\boldsymbol{u}} \times \underline{\boldsymbol{v}}) = \underline{\boldsymbol{v}} \cdot \nabla\underline{\boldsymbol{u}} + \underline{\boldsymbol{u}}\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{v}} - \underline{\boldsymbol{v}}\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{u}} - \underline{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla\underline{\boldsymbol{v}}$

7.6. $\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{u}}\underline{\boldsymbol{u}}) = \underline{\boldsymbol{u}}\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{u}} - \underline{\boldsymbol{u}} \times (\nabla \times \underline{\boldsymbol{u}}) + (\nabla\underline{\boldsymbol{u}}) \cdot \underline{\boldsymbol{u}}$

Задание 8. Вычислите:

8.1. $\nabla \times (R\underline{\underline{\mathbf{E}}})$, где $R = \sqrt{\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{R}}}$.

8.2. $\nabla \times \left(\dfrac{\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{R}}}{R}\right)$, где $R = \sqrt{\underline{\boldsymbol{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{R}}}$, $\underline{\boldsymbol{a}}$ – постоянный вектор

8.3. $\nabla \times \left(\dfrac{\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{R}}}{R^2}\right)$, где $R^2 = \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{R}}$, $\underline{\boldsymbol{a}}$ – постоянный вектор

8.4. $\nabla \cdot [(\nabla\underline{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}} - (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{u}})\underline{\underline{\mathbf{E}}}]$

8.5. $\nabla(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\boldsymbol{R}} - \underline{\boldsymbol{R}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}})$, где $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ – постоянный симметричный тензор второго ранга

8.6. $\nabla(\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{R}})$, $\nabla \times (\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{R}})$, $\nabla \cdot (\underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{R}})$, где $\underline{\boldsymbol{a}}$ – постоянный вектор.

Задание 9. Найдите коэффициенты Ляме указанной системы координат:

9.1. Координаты вытянутого эллипсоида вращения u, v, φ (a - параметр)

$$\begin{cases} x_1 = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v \cos\varphi \\ x_2 = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v \sin\varphi \\ x_3 = a\,\mathrm{ch}\,u \cos v \end{cases}$$

9.2 Координаты сплюснутого эллипсоида вращения u, v, φ (a - параметр)

$$\begin{cases} x_1 = a\,\mathrm{ch}\,u \sin v \cos\varphi \\ x_2 = a\,\mathrm{ch}\,u \sin v \sin\varphi \\ x_3 = a\,\mathrm{sh}\,u \cos v \end{cases}$$

9.3. Координаты эллиптического цилиндра σ, τ, z (a - параметр).

$$\begin{cases} x_1 = a\sigma\tau \\ x_2 = a\sqrt{(\sigma^2-1)(1-\tau^2)} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

9.4. Координаты сплюснутого эллипсоида вращения σ, τ, z (a - параметр)

$$\begin{cases} x_1 = a\,\mathrm{ch}\,u \cos v \\ x_2 = a\,\mathrm{sh}\,u \sin v \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

9.5. Параболические координаты σ, τ, φ.

$$\begin{cases} x_1 = \sigma\tau\cos\varphi \\ x_2 = \sigma\tau\sin\varphi \\ x_3 = \dfrac{1}{2}(\tau^2-\sigma^2) \end{cases}$$

9.6. Бицилиндрические координаты σ, τ, z (a - параметр).

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a\,\mathrm{sh}\,\tau}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma} \\ x_2 = \dfrac{a\sin\sigma}{\mathrm{ch}\,\tau - \cos\sigma} \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

Задание 10. Найдите градиент, дивергенцию и ротор векторной функции $\underline{\boldsymbol{f}}$, заданной в сферических (1–4) или цилиндрических (5–6) координатах:

10.1. $\underline{\boldsymbol{f}} = R\Theta\underline{\boldsymbol{e}}_\Phi$

10.2. $\underline{\boldsymbol{f}} = \Phi\Theta\underline{\boldsymbol{e}}_\Phi$

10.3. $\underline{\boldsymbol{f}} = R\Phi\underline{\boldsymbol{e}}_\Theta$

10.4. $\underline{\boldsymbol{f}} = \Phi\Theta\underline{\boldsymbol{e}}_\Phi$

10.5. $\underline{\boldsymbol{f}} = R\Phi Z\underline{\boldsymbol{e}}_\Phi$

10.6. $\underline{\boldsymbol{f}} = R\Phi Z\underline{\boldsymbol{e}}_R$