1. Доказать, что тензор $\mathbf{A} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega}) \cdot (\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega})^{-1}$ является ортогональным, если тензор $\boldsymbol{\Omega}$ — антисимметричен.

2. Доказать, что тензор $\mathbf{A} = \dfrac{1}{4 + a^2} \left[(4 - a^2)\mathbf{E} + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} - 4\mathbf{E} \times \boldsymbol{a} \right]$, где $a^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$, является ортогональным.

3. Доказать, что для ортогонального тензора $\mathbf{Q}$ справедливо тождество

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{E}) \odot (\mathbf{Q} - \mathbf{E}) = 6 - 2 \operatorname{tr} \mathbf{Q}.$$

4. Найти выражение вектора конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$ через собственно ортогональный тензор $\mathbf{Q}$, т.е. обратить соотношение (14.2).

5. Непосредственными вычислениями доказать, что главные инварианты тензора действительно не зависят от выбора базиса.

6. Для любого тензора второго ранга доказать соотношение

$$I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}^2(\mathbf{X}) - \operatorname{tr} \mathbf{X}^2 \right).$$

7. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$.

8. Найти главные инварианты тензора $\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{a})$, если $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

9. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \boldsymbol{a}$.

10. Вычислить главные инварианты тензора $\mathbf{P} = (\mathbf{E} \times \boldsymbol{a})^2$.

11. Доказать, что главные инварианты ортогонального тензора связаны соотношениями $I_1 I_3 = I_2$; $I_3^2 = 1$.

12. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

13. Доказать, что главные инварианты двух взаимно обратных симметричных тензоров 2-го ранга связаны соотношениями

$$I_1(\mathbf{X}^{-1}) = -\frac{I_2(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})}; \qquad I_2(\mathbf{X}^{-1}) = \frac{I_1(\mathbf{X})}{I_3(\mathbf{X})}; \qquad I_3(\mathbf{X}^{-1}) = I_3^{-1}(\mathbf{X}).$$

14. Найти главные инварианты тензора

$$\mathbf{P} = (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2) + 5\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3.$$

15. Чему равен третий инвариант антисимметричного тензора?

16. Выразить второй инвариант $I_2(\mathbf{X})$ через ковариантные компоненты тензора $\mathbf{X}$ в косоугольном базисе $\mathbf{X} = X_{mn}\boldsymbol{e}^m\boldsymbol{e}^n$.

17. Найти главные инварианты тензора $\mathbf{P} = \lambda\mathbf{E}$.

18. Пусть $\mathbf{X}$ — симметричный тензор второго ранга; $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \dfrac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{X}\mathbf{E}$. Доказать:
    а) $I_1(\mathbf{Y}) = 0$;
    б) $I_2(\mathbf{Y}) \leq 0$.

19. Доказать, что если собственные числа λ_1 и λ_2 симметричного тензора различны, то соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$ ортогональны.

20. Найти собственные числа и собственные векторы тензора:
    а) $\mathbf{P} = 3\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 - (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2$;
    б) $\mathbf{P} = 7\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + 7\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + 4(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + 7\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

21. Найти главные значения и главные оси тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$.

22. Найти собственные числа тензора $\mathbf{P} = \tau(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + \tau(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + \ \ + \tau(\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_3)$.

23. В трехмерном пространстве найти собственные числа и собственные векторы тензора $\mathbf{P} = \alpha\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$.

24. Найти спектральное разложение тензора $\mathbf{E} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$.

25. Найти спектральное разложение тензора $\mathbf{X} = \alpha\mathbf{E} + \beta\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \gamma\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

26. Пользуясь формулой Гамильтона–Кэли, найти $\mathbf{B}^4$ и $\mathbf{B}^{-1}$, если:
    а) $\mathbf{B} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 3\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - (\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) - 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$;
    б) $\mathbf{B} = 3(\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2) - (\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1) + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.
    Проверить полученные результаты непосредственным вычислением.

27. Тензор второго ранга $\mathbf{X}^\perp$ в трехмерном пространстве, определяемый формулой $\mathbf{X}^\perp = \mathbf{X}^2 - I_1\mathbf{X} + I_2\mathbf{E}$, где I_1, I_2 — первый и второй инварианты $\mathbf{X}$, называется тензором, *присоединенным* к $\mathbf{X}$. Доказать, что для неособого тензора $\mathbf{X}$ верна формула $\mathbf{X}^\perp = (\det\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1}$.

28. Доказать, что матрица смешанных компонент присоединенного тензора $\mathbf{X}^\perp$ совпадает с транспонированной матрицей алгебраических дополнений матрицы смешанных компонент тензора $\mathbf{X}$.

29. Пусть $\boldsymbol{e}_k$ — основной базис в $\mathcal{Э}_3$, $\boldsymbol{e}^s$ — взаимный базис, $\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{e}_s\cdot\mathbf{X}$. Доказать тождество

$$\mathbf{X}^\perp = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_s\times\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{e}^s\times\boldsymbol{e}^k).$$

30. Доказать тождество

$$\mathbf{X}^\perp = \frac{1}{2}d_{mnt}d_{skp}X_{sm}X_{kn}\boldsymbol{i}_t\boldsymbol{i}_p; \qquad X_{sm} = \boldsymbol{i}_s\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{i}_m.$$

31. Доказать тождество $\det\mathbf{X} = \dfrac{1}{3}\operatorname{tr}(\mathbf{X}^\perp\cdot\mathbf{X})$.

32. В трехмерном пространстве доказать формулу для третьего инварианта суммы двух тензоров

$$\det(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) = \det\mathbf{X} + \det\mathbf{Y} + \operatorname{tr}(\mathbf{X}^\perp\cdot\mathbf{Y}) + \operatorname{tr}(\mathbf{Y}^\perp\cdot\mathbf{X}).$$

33. Доказать, что тензор $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \dfrac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{E}$, где $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, не может быть положительно определенным.

34. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{Y} = -\mathbf{X}^{-\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{X}$.

35. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}$, если векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ взаимно ортогональны.

36. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$.

37. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E} + \beta\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \gamma\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2$.

38. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{R}^{\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{T} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{Q}$, а тензор $\mathbf{R}$ — ортогональный.

39. Найти полярное разложение тензора $\alpha\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, если известно полярное разложение тензора $\mathbf{X}$.

40. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = 3\mathbf{E} + 4\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 7\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

41. Найти полярное разложение тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + A(\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2) + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

42. Найти полярное разложение особого тензора $\mathbf{P} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_3 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1$.

43. Найти полярное разложение особого тензора $\mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$.