Упражнения

1. Доказать, что если тензоры $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ оба симметричны или оба антисимметричны, то тензор $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}-\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}$ — антисимметричный.

В приведенных ниже упражнениях $\mathbf{P}$ — симметричный, $\mathbf{R}$ — антисимметричный тензор.

2. Доказать: а) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{a}$;
   б) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. Доказать: $\operatorname{tr}\mathbf{R}=0$.

4. Следует ли из соотношения $\operatorname{tr}\mathbf{R}=0$ антисимметричность тензора $\mathbf{R}$?

5. Доказать: $\operatorname{tr}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{R})=0$.

6. Доказать: $\mathbf{P}\odot\mathbf{R}=0$.

7. Доказать: $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})=0$.

8. Доказать симметричность тензора $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}$.

9. Доказать тождество: $(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V})_\times+(\mathbf{V}\cdot\mathbf{U})_\times=0$, если $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ — симметричные тензоры.

10. Вычислить $(\boldsymbol{a}\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{a})^4$.

11. Доказать тождество
$$(\mathbf{E}\times\boldsymbol{a})^{2m}\odot(\mathbf{E}\times\boldsymbol{b})^{2n+1}=0$$
где m, n — целые числа.

12. При каких условиях произведение двух тензоров $\mathbf{E}\times\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{E}\times\boldsymbol{b}$ будет симметричным тензором?

13. Доказать, что тензор $\boldsymbol{a}\times\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}-\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\right)$ симметричен, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

14. Для тензора $\mathbf{T}$ найти симметричную и антисимметричную часть:
   а) $\mathbf{T}=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$;
   б) $\mathbf{T}=\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2-4\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_3$.

15. Найти вектор $\boldsymbol{w}$, сопутствующий антисимметричному тензору
$$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}).$$

16. Вычислить: $(\mathbf{E}\times\boldsymbol{w})^n$.

Упражнения

17. Найти $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^{-\mathrm{T}}$.

18. Непосредственным вычислением доказать, что
   а) $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^{-1}=\mathbf{Y}^{-1}\cdot\mathbf{X}^{-1}$;
   б) $(\mathbf{X}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$.

19. Верно ли, что $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^n=\mathbf{X}^n\cdot\mathbf{Y}^n$?