20. Проверить, что описанное в пункте 3 множество формальных сумм с введенными операциями сложения и умножения на число является линейным пространством.

21. Доказать, что $\boldsymbol{a}\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1\boldsymbol{p} = \mathbf{0}_1\mathbf{0}_2$.

22. Привести пример тензора, не являющегося разложимым.

23. Дано $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3$; $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_2$;
$\mathbf{X} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 + 4\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 - 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2$;
$\mathbf{Y} = \boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2$.

Вычислить:
а) $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \mathbf{X} - 3(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{Y} + \operatorname{tr}[\operatorname{tr}_{(2,3)}(\mathbf{X}\mathbf{Y})]\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}$;
б) $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{b}$;
в) $\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\cdot(\mathbf{X}\times\mathbf{Y}) + (\mathbf{X}\times\mathbf{Y})\cdot\boldsymbol{b}$.

24. Записать в индексном виде (предварительно определив ранг входящих в выражение тензоров):
а) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{a})$;
б) $\operatorname{tr}[(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{A}\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{B}]$.

25. Доказать соотношения:
а) $(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^{\mathrm{T}} = \mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;
б) $\operatorname{tr}\mathbf{X} = \operatorname{tr}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;
в) $\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{a}$;
г) $\operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}) = \operatorname{tr}(\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}) = \operatorname{tr}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}})$;
д) $\mathbf{X}\odot\boldsymbol{a} = \mathbf{X}\cdot\boldsymbol{a}$;
е) $\mathbf{X}\odot\mathbf{Y} = \operatorname{tr}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}^{\mathrm{T}})$, $\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\in\mathcal{T}_2$;
ж) $\mathbf{P}\times\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$;
з) $\operatorname{tr}(\mathbf{P}\times\boldsymbol{a}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})$;
и) $\operatorname{tr}[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P})] = \boldsymbol{b}\cdot\mathbf{P}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\operatorname{tr}\mathbf{P}$.

26. Упростить выражение $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{P}\times\boldsymbol{b})$; $\quad\mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$.

27. Решить уравнение:
а) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})\mathbf{B} + \alpha\mathbf{X} = \beta\mathbf{C}$;
б) $\mathbf{X} + \alpha(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{B} = \mathbf{A}$;
в) $2\mathbf{X} + (\mathbf{A}\odot\mathbf{X})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\odot\mathbf{X})\mathbf{A} = \mathbf{C}$, где $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{X}\in\mathcal{T}_p$
г) $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} + \alpha(\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{B} = \mathbf{A}$;
д) $\operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X})\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \operatorname{tr}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{X})\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{X} = \mathbf{C}$.

28. При каких условиях уравнение

$$\alpha\mathbf{X} + (\operatorname{tr}\mathbf{X})\mathbf{A} = 0$$

имеет ненулевые решения? Найти эти решения.

29. Дано
$$\mathbf{A} = 2\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 - \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_1 + \boldsymbol{i}_3\boldsymbol{i}_2;$$
$$\mathbf{B} = 3\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + 5\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2.$$
Вычислить а) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \odot \mathbf{B}$;
б) $(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \odot \mathbf{B}$.

30. Доказать, что для любых тензоров $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \odot \mathbf{B} = 0.$$

31. Доказать тождество
$$(\boldsymbol{a} \times \mathbf{P})_\times = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{P}$$
.

32. Линейную функцию $l(\mathbf{X})$ записать в виде полного умножения на тензор:
    а) $l(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}\mathbf{X}$;
    б) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
    в) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}\cdot\boldsymbol{b}$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
    г) $l(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$; $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
    е) $l(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}$;
    ж) $l(\mathbf{X}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B})$, $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$;
    з) $l(\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}\times\boldsymbol{x}$, где $\mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$;
    и) $l(\mathbf{X}) = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{b} + \operatorname{tr}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\cdot\mathbf{B})$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}\in\mathcal{T}_2$;
    к) $l(\boldsymbol{x}) = 2\mathbf{P}\times\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{x}\times\mathbf{E}$, $\quad\mathbf{P}\in\mathcal{T}_2$;
    л) $l(\mathbf{X}) = 3\mathbf{X}_{\times}$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_2$.

33. Доказать, что если равенство $\mathbf{A}\odot\mathbf{X} = 0$ ($\mathbf{A}\in\mathcal{T}_p$, $\mathbf{X}\in\mathcal{T}_q$, $p\geq q$) выполняется для всех $\mathbf{X}$, то $\mathbf{A} = 0$.

34. Найти $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{b})_{\times}$ и $\operatorname{tr}(\boldsymbol{a}\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{b})$.

35. Преобразовать: $\boldsymbol{a}\times\mathbf{E}\times\boldsymbol{b}$.

36. Доказать тождество

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})\mathbf{E} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y}\,\boldsymbol{x}\boldsymbol{a}.$$

37. Доказать тождество

$$(\mathbf{E}\times\boldsymbol{a})\cdot\mathbf{P} = \boldsymbol{a}\times\mathbf{P}.$$

38. Доказать тождество

$$(\mathbf{E}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{k}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}\boldsymbol{k},$$

    если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k} = 0$, $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$.

39. Доказать тождество

$$\left[(\mathbf{P}^{\mathrm{T}} - \mathbf{P})\times\boldsymbol{a}\right]\odot(\mathbf{E}\times\boldsymbol{b}) = (\mathbf{P}_{\times}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$$