Упражнения

1. Расшифровать следующие выражения: а) A_{ii}; б) T_{ij}; в) $a_i R_{ij}$; г) $a_i b_j S_{ij}$.

2. а) Даны матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{mn}\|$. Написать выражение для элемента c_{ks} матрицы $C = AB$.
   б) Записать в индексных обозначениях условие того, что матрица B является обратной матрице A, т.е. $BA = AB = E$, где E – единичная матрица.

3. Преобразовать (в трехмерном пространстве) следующие выражения:

   а) $a_j\delta_{ij}$;
   б) $a_i a_j \delta_{ij}$;
   в) δ_{ii};
   г) $\delta_{ij} A_{ik}$;
   д) $\delta_{ij}\delta_{jk}$;
   е) $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{ki}$.

4. Выписать всевозможные выражения для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ через компоненты этих векторов.

5. Выписать всевозможные выражения для длины вектора $\boldsymbol{a}$ через компоненты этого вектора.

6. Доказать, что $a^k = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^k$; $a_m = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_m$.

7. Эквивалентны ли соотношения 1 и 2:
   а) 1. $A^m_n b^n \boldsymbol{e}_m = c^m \boldsymbol{e}_m$
      2. $A^m_n b^n = c^m$
   б) 1. $c_k = A^m_k b_m$
      2. $c_j = A^n_j b_n$
   в) 1. $a^m b_m = 0$
      2. $a^m = 0$ или $b_m = 0$

В пространстве геометрических векторов $Э_3$ кроме скалярного умножения существует еще одна операция – векторное произведение. Для решения следующих упражнений необходимо вспомнить некоторые элементарные свойства этой операции и связанных с ней действий и, кроме того, вывести формулу для записи векторного произведения в компонентах.

Прежде всего, векторное произведение – это вектор

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \in Э_3.$$

Изменение порядка векторов приводит к изменению знака векторного произведения:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

С использованием векторного произведения строятся такие операции как смешанное произведение

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c} = -(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}$$

и двойное векторное произведение:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}). \tag{2.6}$$

Рассмотрим два вектора $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathcal{Э}_3$. Ограничиваясь случаем ортонормированного базиса, получим формулу компонентной записи векторного произведения этих векторов.

Пусть $\boldsymbol{i}_s$ – ортонормированный базис;

$$\boldsymbol{a} = a_m \boldsymbol{i}_m; \;\; \boldsymbol{b} = b_k \boldsymbol{i}_k.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_m b_k \boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k = a_m b_k \boldsymbol{d}_{mk}.$$

Для нахождения компонент неизвестного вектора $\boldsymbol{d}_{mk}$ составим их выражения через скалярные произведения

$$\boldsymbol{d}_{mk} \cdot \boldsymbol{i}_s = (\boldsymbol{i}_m \times \boldsymbol{i}_k) \cdot \boldsymbol{i}_s \stackrel{\text{def}}{=} d_{mks}. \tag{2.7}$$

Полученные величины d_{mks} называются символами Леви-Чивита. Согласно свойствам смешанного произведения (тройка $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ считается правой) имеем

$$d_{123} = d_{231} = d_{312} = 1; \;\; d_{213} = d_{321} = d_{132} = -1;$$

остальные компоненты равны нулю.

Таким образом, искомая формула для векторного произведения имеет вид:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_m b_k d_{mks} \boldsymbol{i}_s. \tag{2.6}$$

Что касается свойств символов Леви-Чивита, то очевидна их антисимметрия по любой паре индексов (перестановка двух индексов приводит к изменению знака) и независимость от круговой перестановки индексов.

Еще одно свойство, необходимое для решения упражнений, сформулируем без доказательства (вывод его будет дан ниже в п. 10):

$$d_{ijk} d_{mns} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{is} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{js} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{ks} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

8. Исходя из соотношения

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}),$$

преобразовать:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}.$$

9. Используя соотношение (2.9), преобразовать:
   а) $d_{ijk} d_{mnk}$;
   б) $d_{ijk} d_{mjk}$;
   в) $d_{ijk} d_{ijk}$.

10. Верны ли соотношения:
    а) $A_{ij}A_{ij} = A_{ij}^2$;
    б) $A_{ij}B_j = A_{ji}B_i$;
    в) $\delta_{jk}^2 = \delta_{jk}$;
    г) $d_{mnk}d_{ijk} = d_{ijk}d_{mnk}$.

11. Вычислить:
    а) $d_{ijk}\delta_{jk}$;
    б) $d_{ijk}d_{mkj}\delta_{mi}$;
    в) $d_{ijk}\delta_{mk}\delta_{jm}$;
    г) $a_i a_j d_{ijk}$;
    д) $d_{ijk}|d_{ijk}|$.

12. Проверить формулу (2.9) для $d_{ijk}d_{mns}$.

13. Записать выражение $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ в индексном виде.

14. Доказать:
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

15. Преобразовать с использованием символов Леви- Чивита
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}.$$

16. С использованием символов Леви-Чивита доказать, что
    а) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$;
    б) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{a} = 0$.

17. Доказать эквивалентность формул, а затем доказать одну из них:
    1) $d_{ijk}a_{im}a_{jn}a_{ks} = d_{mns}\det A$;
    2) $\det A = \dfrac{1}{6}d_{ijk}d_{mns}a_{im}a_{jn}a_{ks}$; где $A = \|a_{ks}\|$.

18. Преобразовать:
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}).$$

19. Доказать:
$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}.$$