Возьмем

$$x_*(t) = \left| t - \frac{a+b}{2} \right|.$$

Это элемент пространства $C[a,b]$, который не принадлежит $C^1[a,b]$. По теореме Вейерштрасса любую непрерывную на отрезке функцию можно равномерно приблизить тригонометрическими многочленами. Следовательно, существует последовательность элементов пространства $C^1[a,b]$, сходящаяся к x_*. Но x_* не принадлежит $C^1[a,b]$. Утверждение доказано. □

Задача 8.20. *Докажите, что множество полиномов с максимум-нормой не является подпространством $C[a,b]$, а множество полиномов ограниченной степени с максимум-нормой является подпространством $C[a,b]$.*

8.5 Геометрия гильбертова пространства

Определение 8.8. *Элементы x и y предгильбертова пространства называются ортогональными, если $(x,y) = 0$.*

В предгильбертовом пространстве можно определить ортогональное дополнение произвольного множества M.

Определение 8.9. *Пусть H — предгильбертово пространство. Ортогональным дополнением множества $M \subset H$ называется множество*

$$M^\perp = \{ y \in H : (y,m) = 0 \quad \forall\, m \in M \}.$$

В следующей теореме важно, что H — гильбертово пространство, а L — его подпространство, т. е. замкнутое линейное многообразие.

Теорема 6 (об ортогональном дополнении). *Пусть $L \subset H$ — подпространство гильбертова пространства H. Тогда любой элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде: $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^\perp$ (т. е. H распадается в прямую сумму подпространств $H = L \oplus L^\perp$).*

Докажите следующие утверждения об ортогональном дополнении:

Задача 8.21. *Для любого множества M в гильбертовом пространстве H множество $M^\perp$ является подпространством.*

Задача 8.22. *Пусть M, N — такие множества в гильбертовом пространстве H, что $M \subset N$. Докажите, что $N^\perp \subset M^\perp$.*

Задача 8.23. *Докажите, что для любого множества M в гильбертовом пространстве H имеет место включение $M \subset (M^\perp)^\perp$. Возможно ли здесь строгое включение?*

Задача 8.24. *Пусть M — любое подмножество в гильбертовом пространстве H. Докажите, что $(M^\perp)^\perp$ совпадает с замыканием линейной оболочки .*

Задача 8.25. *Докажите, что для множества M в гильбертовом пространстве H равенство $M = (M^\perp)^\perp$ выполняется тогда и только тогда, когда — подпространство H.*

Задача 8.26. *В вещественном предгильбертовом пространстве непрерывных на $[-1,1]$ функций со скалярным произведением*

$$(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$$

рассмотрим множество M функций $x(t)$, равных нулю при $t \leqslant 0$.

а) Докажите, что M — подпространство.

б) Найдите подпространство $M^\perp$.

в) Выполняется ли в данном пространстве утверждение теоремы об ортогональном дополнении?

8.6 Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Определение 8.10. *Система элементов $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ гильбертова пространства H называется ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.*

Здесь δ_{ij} — символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Определение 8.11. *Бесконечная система элементов $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ называется линейно независимой, если всякая конечная подсистема этой системы линейно независима.*

Из произвольной последовательности линейно независимых элементов гильбертова пространства можно построить ортонормированное множество с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Положим

$$e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, \qquad e_2 = \frac{h_2 - \alpha_{21}e_1}{\|h_2 - \alpha_{21}e_1\|},$$

$$e_3 = \frac{h_3 - \alpha_{31}e_1 - \alpha_{32}e_2}{\|h_3 - \alpha_{31}e_1 - \alpha_{32}e_2\|}, \ldots, \quad e_n = \frac{h_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}e_j}{\left\| h_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}e_j \right\|}, \ldots,$$

где $\alpha_{nj} = (h_n, e_j)$. Полученная система будет ортонормированной.

Пример 8.5. *В результате ортогонализации системы линейно независимых элементов* $1,\ t,\ t^2,\ldots$ *в пространстве* $L_2(-1,1)$ *получается ортогональная система многочленов Лежандра. Найдем три ее первых многочлена.*

Применим общую схему процесса ортогонализации Грама-Шмидта. По условию $h_1 = 1$, $h_2 = t$, $h_3 = t^2$.

Последовательно находим:

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{21} = (h_2, e_1) = \left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t\,dt = 0,$$

$$\|h_2\| = \|t\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2 dt\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad e_2 = \frac{h_2 - \alpha_{21} e_1}{\|h_2 - \alpha_{21} e_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t.$$

Аналогично

$$\alpha_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \alpha_{32} = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0,$$

$$\|h_3 - \alpha_{31} e_1\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = \frac{8}{45},$$

$$e_3 = \frac{h_3 - \alpha_{31} e_1 - \alpha_{32} e_2}{\|h_3 - \alpha_{31} e_1 - \alpha_{32} e_2\|} = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right).$$

Итак, три первых многочлена ортонормированной системы многочленов Лежандра имеют вид:

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \quad e_3 = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right). \tag{8.6}$$

Задача 8.27. *Выведите общую формулу для* n*-го нормированного многочлена Лежандра [9, с. 453]:*

$$e_n(t) = \frac{1}{n! 2^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

Задача 8.28. *В линейном пространстве непрерывных на* $[0, \infty)$ *функций* $x(t)$ *таких, что* $\int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-t} dt$ *сходится, положим*

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t) y(t) e^{-t} dt.$$

а) Проверьте выполнение аксиом скалярного произведения.

б) Рассмотрим линейно независимую систему $1,\ t,\ t^2,\ldots$ *В результате ее ортогонализации получается ортогональная система многочленов Чебышева–Лагерра. Найдите три ее первых многочлена.*

Задача 8.29. *В линейном пространстве непрерывных на* $(-\infty, +\infty)$ *функций* $x(t)$ *таких, что* $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t^2} dt$ *сходится, положим*

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t) e^{-t^2} dt.$$

а) Проверьте выполнение аксиом скалярного произведения.

б) Рассмотрим линейно независимую систему $1,\ t,\ t^2,\ldots$ *В результате ее ортогонализации получается ортогональная система многочленов Чебышева–Эрмита. Найдите три ее первых многочлена.*

8.7 Базисы банаховых и гильбертовых пространств

Чтобы подчеркнуть свойства, присущие лишь гильбертовым пространствам, ряд определений, утверждений и примеров этого пункта будут даны для банаховых пространств. Для простоты рассматриваются сепарабельные пространства.

Определение 8.12. *Система элементов* $\{h_j\}_{j=1}^{\infty}$ *банахова пространства* B *называется полной в* B*, если линейная оболочка* $L\left(\{h_j\}_{j=1}^{\infty}\right)$ *всюду плотна в* B*:* $\overline{L\left(\{h_j\}_{j=1}^{\infty}\right)} = B$.

Банахово пространство сепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует счетная полная система. При изучении полных систем важным является вопрос о том, образует ли данная система базис пространства.

Определение 8.13. *Система элементов* $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ *образует базис банахова пространства* B*, если любой элемент* x *из* B *представим единственным образом в виде ряда, сходящегося по норме данного пространства:*

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j.$$

Не всякая полная линейно независимая система образует базис как в случае банахова пространства, так и в случае гильбертова пространства.

Пример 8.6. *В банаховом (не гильбертовом!) пространстве $C[0,1]$ непрерывных на $[0,1]$ функций с максимум-нормой линейно независимая система элементов $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ является полной, так как, по теореме Вейерштрасса, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить многочленами. Но эта полная система не является базисом.*

Действительно, если справедливо представление

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \tag{8.7}$$

причем ряд в правой части сходится равномерно, то $f(t)$ аналитична при $|t| < 1$, и, следовательно, для произвольной непрерывной функции такое представление невозможно.

Пример 8.7. *В гильбертовом пространстве $L_2(0,1)$ система элементов $\{t^k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной, так как она полна в $C[0,1]$, а множество непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций плотно в $L_2(0,1)$. Но и в пространстве $L_2(0,1)$ эта система не является базисом.*

Пусть $f \in L_2(0,1)$ и справедливо разложение (8.7), в котором ряд сходится в $L_2(0,1)$. Умножив обе части (8.7) скалярно на

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant s, \\ 0 & \text{при} \quad t > s, \end{cases}$$

приходим к следующему равенству:

$$\int_0^s f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1},$$

из которого следует, что $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ аналитична при $|s| < 1$. Поэтому, как и в предыдущем примере, получаем, что $f(t)$ аналитична при $|t| < 1$, и, следовательно, для произвольной функции из $L_2(0,1)$ представление (8.7) невозможно.

Для всех сепарабельных банаховых пространств, которые рассматриваются в данном курсе, базисы были построены. Примеры базисов в $C[0,1]$,

$L_p(0,1), \ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ приведены в [10]. Проблема базиса, которая формулируется так: каждое ли сепарабельное банахово пространство обладает базисом? — долгое время оставалась открытой. Ответ оказался отрицательным: в 1972 г. М. Энфло привел пример сепарабельного банахова пространства, в котором не существует базиса.

В гильбертовом пространстве любая полная **ортонормированная** система элементов является базисом.

Теорема 7 (о базисе). *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированная система гильбертова пространства H. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*
1) линейная оболочка $L\left(\{e_j\}_{j=1}^{\infty}\right)$ всюду плотна в H (полнота);
2) если $(x, e_j) = 0 \ \forall j = 1, 2, \ldots$, то $x = 0$;
3) $\forall x \in H$ выполняется равенство Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2; \tag{8.8}$$

4) любой элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде ряда, сходящегося по норме H:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} (x, e_j) e_j \tag{8.9}$$

(разложение Фурье).

Докажите следующие утверждения о базисах:

Задача 8.30. *В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис [11, с. 92].*

Задача 8.31. *Во всяком гильбертовом пространстве (не обязательно сепарабельном) существует ортонормированный базис [13, с. 59].*

Задача 8.32. *а) тригонометрическая система $1, \quad \cos(nt), \quad \sin(nt)$, $n = 1, 2, \ldots$ образует базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$ [9, с. 447];*
б) многочлены Лежандра образуют базис пространства $L_2(-\pi, \pi)$.

Задача 8.33. *Функции $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nt)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,\pi)$, но в $L_2(-\pi,\pi)$ эта система не является базисом.*

Задача 8.34. *Функции $\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}} e^{i2\pi n \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}}\right\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\alpha,\beta)$.*

Отрезок ряда Фурье обладает следующим экстремальным свойством: линейная комбинация

$$\sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j$$

дает наилучшую аппроксимацию элемента x по сравнению с другими линейными комбинациями вида

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j.$$

Теорема 8 (об экстремальном свойстве отрезка ряда Фурье). *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H. Тогда для произвольного набора комплексных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n$ имеет место неравенство:*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n}(x,e_j)e_j \right\| \leqslant \left\| x - \sum_{j=1}^{n}\gamma_j e_j \right\|.$$

Для решения следующих двух задач примените теорему об экстремальном свойстве отрезка ряда Фурье.

Задача 8.35. *Для функции e^t найдите многочлены $P_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|e^t - P_n(t)\|$ минимальна в $L_2(-1, 1)$.*

Задача 8.36. *Для функции t^3 найдите многочлены $P_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|t^3 - P_n(t)\|$ минимальна в $L_2(-1, 1)$.*

Важным следствием теоремы о базисе является утверждение об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств. Ранее уже было введено отношение эквивалентности на множестве всех метрических пространств — изометрический изоморфизм. Два метрических пространства (X, ρ) и (Y, d) называются изометрически изоморфными, если существует отображение $f : X \longmapsto Y$, которое является биекцией и изометрией. В случае линейных нормированных пространств естественно потребовать дополнительно, чтобы отображение f сохраняло операции сложения и умножения на число, т. е. было линейным отображением. Полученное отношение эквивалентности будем для краткости называть изоморфизмом.

Теорема 9. *Любое вещественное (комплексное) сепарабельное гильбертово пространство изоморфно пространству ℓ_2, и, следовательно, все вещественные (комплексные) сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Кроме сходимости по норме, в гильбертовом пространстве можно ввести понятие слабой сходимости элементов.

Определение 8.14. *Последовательность элементов $\{f_n\}$ гильбертова пространства H слабо сходится к f, если $\forall g \in H \quad (f_n, g) \to (f, g)$ при $n \to \infty$.*

Пример 8.8. *Пусть $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. Тогда, согласно равенству Парсеваля (8.8): $\|x\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty}|(x,e_j)|^2$. В силу сходимости ряда в правой части этого равенства, для любого элемента $x \in H$ числовая последовательность (x, e_j) стремится к нулю при $j \to \infty$. Поэтому последовательность базисных векторов $\{e_j\}$ слабо сходится к нулю, хотя $\|e_j\| = 1 \; \forall j$.*

Этот пример, в частности, показывает, что норма не является слабо непрерывной функцией.

Задача 8.37. *Докажите, что скалярное произведение слабо непрерывно по каждому аргументу в отдельности, но не является слабо непрерывным по совокупности двух переменных [19, с. 19].*

Задача 8.38. *Если $f_n \to f$ (слабо) и $\|f_n\| \to \|f\|$, то $f_n \to f$ (сильно).*

В заключение заметим, что существуют два понятия размерности гильбертова пространства H: это алгебраическая размерность и ортогональная размерность. Под алгебраической (или линейной) размерностью понимается мощность множества элементов, составляющих алгебраический базис пространства — максимальное линейно независимое подмножество в H, такое, что любой вектор представляет собой конечную линейную комбинацию векторов алгебраического базиса. Под ортогональной размерностью понимается мощность максимального ортонормированного подмножества в H. Аналогом конечного линейного разложения, свойственного алгебраическим базисам, является разложение Фурье. В конечномерном случае алгебраическая и ортогональная размерности совпадают. Однако бесконечномерных гильбертовых пространств счетной линейной размерности не существует.

Задача 8.39. *Докажите утверждение: если ортогональная размерность гильбертова пространства бесконечна, то линейная размерность больше либо равна мощности континуума [19, с. 14].*