Тема 4 а)

Контрольные задания

Вычисление пределов и дифференцирование

1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.
2. Дана последовательность, заданная общим членом $x_n=\dfrac{n^2+1}{3n^2-4}+\dfrac{\sqrt{n}+5}{n+2}$. Найти ее предел при $n\to\infty$.
3. Найти пределы функции $y=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ при $x\to+0$ и при $x\to-0$.
4. Найти первую и вторую производную функции $y=x+\sin x$, задав функцию и ее производную а) как выражение, б) как функциональный оператор. В обоих случаях вычислить значение производных в точке $x=\pi/2$.
5. Найти производную $\dfrac{\mathrm{d}^5}{dx^5}(5x^6\ln x)$ с помощью команды diff и с помощью оператора D.
6. Найти частную производную $\dfrac{\partial^4}{\partial x^3\partial y}(x^6\sin(y^3))$ с помощью команды diff и с помощью оператора D.
7. Найти все частные производные первого и второго порядка для заданной функции. При необходимости упростить ответ.

$$f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Исследование функции

8. Определить средствами Maple точки разрыва и виды разрывов для заданных ниже функций. Исследовать указанные функции с помощью команд **`iscont`**, **`discont`**, **`singular.`** Вычислить односторонние пределы в точках разрыва для определения характера разрыва (устранимый разрыв I рода, неустранимый разрыв I рода, разрыв II рода). Записать ответ в текстовом комментарии. Для иллюстрации ответа построить графики указанных функций.

   1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$
   2) $y=signum(x)$
   3) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$
   4) $y=e^{\frac{1}{x}}$
   5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   6) $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

9. Найти глобальные и локальные экстремумы (с указанием характера экстремума: минимум или максимум) и точки экстремумов функций:

   а) $y=\arctan(x)-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}$ б) $y=x^4-x^2$.

   Сначала найти точки, подозрительные на экстремум, с помощью команды **`extrema`**, затем исследовать все критические точки, используя по отдельности три способа:

1) команды **minimize**, **maximize** с опцией **location**
2) исследование по первой производной (команда **diff**),
3) исследование по второй производной (команда **diff**).

Записать ответ в текстовом комментарии. Для иллюстрации ответа построить графики указанных функций.

10. Найти экстремумы функции и точки экстремумов на заданном интервале: $f(x) = x\sin x + \cos x - x^2/4$, $x \in [-1,1]$ и указать их характер. Сначала найти точки, подозрительные на экстремум, с помощью команды **extrema**, затем исследовать все критические точки на заданном интервале с помощью команд **minimize**, **maximize** с опцией **location**. Записать ответ в текстовом комментарии. Для иллюстрации ответа построить графики указанной функции в общем виде, чтобы были видны все экстремумы, и вид на заданном интервале.

11. Найти экстремумы и точки экстремумов функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Сначала найти точки, подозрительные на экстремум, с помощью команды **extrema**, затем исследовать все критические точки с помощью команд **minimize**, **maximize** с опцией **location**. Построить график функции с указанием координат экстремумов на рисунке в виде loc/glob min/max: (x_coord, y_coord), например: “loc max: (1, 2)”, с подстановкой значений координат экстремумов в строку надписи (команда **textplot**). Следует подумать, как извлечь значения координат из результата **minimize/maximize** и подставить эти значения в **textplot** (здесь можно использовать **typeset**).

12. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$ по схеме (стр. 9 в Теме 4 а):
    1) Непрерывность и точки разрыва функции (использовать **iscont**, **discont**, **singular**, а также вычисление односторонних пределов). Записать ответ в текстовом комментарии.
    2) Область определения функции: после нахождения точек разрыва записать ответ в текстовом комментарии.
    3) Исследование функции на четность и нечетность (использовать **type(f, evenfunc(x))**, **type(f, oddfunc(x))**
    4) Исследование функции на периодичность: выполнить подстановку и проверить, выполняется ли равенство f(x)=f(x+T).
    5) Нахождение вертикальных и наклонных асимптот по формулам. Функция имеет вертикальные асимптоты, если есть бесконечные разрывы. Уравнения наклонных асимптот имеют вид $y_i = k_i x + b_i$, i=1,2, где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x),$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x).$$

    Функция имеет наклонную асимптоту, если коэффициенты k и b конечные.
    6) Исследование функции на глобальные и локальные экстремумы, нахождение глобальных минимумов и максимумов, локальных минимумов и максимумов. Сначала найти точки, подозрительные на экстремум, с помощью команды **extrema.** Затем найти точки экстремумов и значения функции в точках экстремумов. Для этого использовать три разных способа: а) команды **maximize, minimize** с опцией **location**, б) исследование по первой производной, в) исследование по второй производной.

7) Построение графика функции с построением асимптот (если есть) и указанием координат экстремумов на графике в виде loc/glob min/max: (x_coord, y_coord), например: “loc max: (4.5, −9.48)”.

Разложение в ряд и аппроксимация

13. Разложить в степенной ряд и в ряд Тейлора $f(x) = \arcsin x$ в окрестности $x = 0$ и $x = -1$ до восьмого порядка. Сравнить действия двух команд. Почему может не существовать разложение функции в ряд Тейлора? Для поиска ответа на вопрос следует найти производные функции в указанных точках. Сформулировать ответ в текстовом комментарии.

14. Найти несколько частичных сумм ряда Маклорена функции $f = (1 - x^2)arctg(x)$ для n=3, 5, 10, 20. Построить в одних осях графики самой функции и ее приближений в виде частичных сумм ряда Маклорена на отрезке [-1,1]. Изобразить исходную функцию черной сплошной линией, а графики ее приближений – пунктирными линиями разных цветов. Добавить легенду с подписями кривых. Визуально определить по графику, на каком интервале кривая для каждого *n* совпадает с кривой графика функции. Записать ответ в текстовом комментарии.

15. Задана таблица значений некоторой функции в точках:

x	10	15	17	20
y	3	7	11	17

Найти функцию, которая проходит через эти точки и построить ее график. Обозначить точки интерполяции на графике в виде кружка.