Постановка задачи линейной теории упругости

1. **Уравнение движения**

   В тензорном виде:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = \rho \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2},$$

   где $\underline{u}$ — вектор перемещений, $\underline{u} = \{u_1(x_1, x_2, x_3), u_2(x_1, x_2, x_3), u_3(x_1, x_2, x_3)\}$, $\underline{f}$ —вектор внешних сил, $\underline{\underline{\sigma}}$ — тензор напряжений второго ранга.

   Данное уравнение рассматривается в динамической задаче. Для статической задачи имеем уравнение равновесия:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f} = 0.$$

   В координатном виде (для декартовой системы координат):

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad i, j = \{1, 2, 3\},$$

   имеем три уравнения движения

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho f_1 = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho f_2 = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}.$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ — симметричный тензор}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T.$$

   В координатном виде уравнение движения можно также записать в форме:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = \{1, 2, 3\}.$$

2. **Соотношение связи деформаций и перемещений**

   В тензорном виде:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T),$$

   где $\underline{\underline{\varepsilon}}$ — тензор линейных деформаций второго ранга.

   В координатном виде (для декартовой системы координат):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad i, j = \{1, 2, 3\},$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \text{ — симметричный тензор}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^T.$$

3. **Обобщенный закон Гука** (определяющее соотношение теории упругости, связывающее тензор напряжений и тензор деформаций)

   В тензорном виде:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

   где $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ — тензор упругих модулей (постоянных) четвертого ранга.

   В координатном виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkm}\varepsilon_{km}$$

   тензор $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ имеет $3^4 = 81$ компоненту.

Закон Гука можно представить в матрично-векторной форме. Если тензор $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ обладает симметрией по первой и второй паре индексов $c_{ijkm} = c_{jikm}$, $c_{ijkm} = c_{ijmk}$, то с помощью подстановки $11 \to 1$, $22 \to 2$, $33 \to 3$; $23, 32 \to 4$; $13, 31 \to 5$; $12, 21 \to 6$ элементы тензора упругих постоянных могут быть записаны в виде матрицы 6x6, а элементы тензора напряжений и тензора деформаций — в виде векторов 6x1:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix},$$

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} \\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} \\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_p = c_{ps}\varepsilon_s.$$

В данной записи коэффициент 2 при компонентах тензора деформации ε_{23}, ε_{12}, ε_{13} необходим для того, чтобы матричные уравнения в точности соответствовали тензорным.

Таким образом, матрица упругих постоянных $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ имеет 36 компонент в общем случае для *анизотропной* среды (упругие свойства среды зависят от выбора системы координат, различаются по направлениям).

В общем случае матрица $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ не является симметричной. Если существует энергия деформации, то матрица $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ симметрична $c_{ps} = c_{sp}$ и имеет 21 независимую компоненту. Рассмотрим частные случаи.

Если существует плоскость симметрии упругих свойств, то матрица $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ имеет 20 ненулевых компонент:

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix},$$

из которых 13 различны в случае симметричной матрицы.

В случае *ортотропного* тела через каждую точку проходят три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, и матрица $\underline{\underline{C}}$ имеет 12 ненулевых компонент:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix},$$

из которых 9 различны в случае симметричной матрицы.

В случае *изотропного* тела упругие свойства одинаковы по всем направлениям, и число независимых упругих постоянных в матрице $\underline{\underline{C}}$ сводится к двум, имеющим название *коэффициентов Ламе* λ и μ:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Запишем закон Гука для изотропного тела в тензорном и координатном виде (в декартовой системе координат):

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{I}} \varepsilon + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}},$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij},$$

где $\underline{\underline{I}}$ — единичный тензор, δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon = tr\underline{\underline{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Обычно в качестве физических характеристик известны модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, по которым коэффициенты Ламе определяются с помощью формул:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Плоская задача теории упругости

- **Модель плоского напряженного состояния** рассматривает тонкие цилиндрические тела, у которых *один размер много меньше других*, при этом лицевые поверхности свободны от механических нагрузок, векторы граничных напряжений или перемещений приложены к торцам тела, векторы массовых сил лежат в плоскости, параллельной лицевым поверхностям

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}.$$

  Закон Гука в случае плоского напряженного состояния имеет вид:

$$\sigma_{11} = \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{11},$$

$$\sigma_{22} = \lambda^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\mu\varepsilon_{22},$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

  где $\lambda = 2\mu\lambda/(\lambda+2\mu)$ — поправочный коэффициент.

- **Модель плоской деформации** рассматривает достаточно протяженные тела, у которых *один размер много больше других*, при этом сечение остается неизменным, векторы массовых сил лежат в плоскости, перпендикулярной оси тела

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$