НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ*

Ю.А. Устинов

Ростовский государственный университет

E-mail: ustinov@math.rsu.ru

УДК 559,3; 612.76

В статье дается краткий обзор результатов, полученных автором для упругих тел, обладающих винтовой анизотропией. Приводятся основные соотношения линейной теории упругости для таких тел и описывается метод построения решения задач Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе кругового цилиндра с винтовой анизотропией. Приводятся результаты асимптотического и численного решения этих задач. К ранее неопубликованным относятся уравнения движения цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией и результаты исследования особенностей волновых процессов, вызываемых структурой стенки такой оболочки. Предложена математическая модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах и приведены некоторые результаты численного анализа.

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндр с винтовой анизотропией можно представить, в частности, как результат винтовой намотки слоев тонких нитей из жесткого материала на цилиндрическую поверхность с одновременным покрытием их полимерным материалом. Таким образом получается локально трансверсально-изотропный композит с осью симметрии, направленной по касательным к винтовым спиралям, для определения приведенных упругих характеристик которого можно использовать методы гомогенизации [1, 2]. Цилиндрическую оболочку с винтовой анизотропией можно получить также путем свертывания прямоугольной ортотропной пластины в трубку, если направления главных осей упругой симметрии не совпадают с направлениями ее сторон. Согласно описанию структуры стенок артериальных сосудов, приведенных в [3], можно считать, что они также обладают винтовой анизотропией.

При растяжении-сжатии цилиндра с винтовой анизотропией помимо продольной деформации возникает крутильная и, наоборот, при кручении

* Описанные результаты получены при поддержке грантов РФФИ (01~01~00454, 04~01~00069) и Президента РФ (НШ~2113.2003.1).

помимо крутильной — продольная деформация. Аналогичными свойствами обладают и естественно закрученные стержни [4, 5].

Основные соотношения линейной теории упругости для тел с винтовой анизотропией и результаты исследований задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией опубликованы в [6—9].

Построение основных соотношений для цилиндрической оболочки на основе гипотез Кирхгоффа~Лява и результаты исследования распространения гармонических волн и описание особенностей волновых процессов приводятся впервые.

К неопубликованным относятся также результаты по построению математической модели винтового пульсового движения крови в артериальных кровеносных сосудах.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Рассмотрим цилиндрическое тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S — поперечное сечение цилиндра, L — его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$, ∂S — граница S. С геометрическим центром тяжести одного из торцов цилиндра свяжем начало декартовой системы координат x_1, x_2, x_3. Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем сопутствующую цилиндрическую систему координат* r, z, θ, связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r\cos(\theta + \tau z), \quad x_2 = r\sin(\theta + \tau z), \quad x_3 = z. \tag{1.1}$$

Здесь и ниже предполагается, что $\tau = const$.

Соотношения (1.1) при $r = const$, $\theta = const$ являются параметрическими уравнениями винтовой линии, при этом $\tau = 2\pi/h$, где h — шаг винтовой спирали. Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде

$$\mathbf{R} = r\mathbf{e}_1' + z\mathbf{e}_3',$$

$$\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1\cos(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2\sin(\theta + \tau z),$$
$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{i}_1\sin(\theta + \tau z) + \mathbf{i}_2\cos(\theta + \tau z),$$

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_z,$$

$\mathbf{i}_n$ — орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный репер

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},$$

где $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно.

* Переход к цилиндрической системе связан с тем, что ниже основное внимание будет уделено цилиндру с кольцевым поперечным сечением r_1, r_2 — внутренний и наружный радиусы цилиндра соответственно.

Используя формулы

$$d\mathbf{R} / ds = \mathbf{t}, \quad d\mathbf{t} / ds = k\mathbf{n}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n},$$

$$ds = gdz, \quad g^2 = 1 + x^2, \quad x = \tau r,$$

где $k = t^2 r / g^2$ — кривизна винтовой линии, после преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i$

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/g & x/g \\ 0 & x/g & 1/g \end{Vmatrix}.$$

Будем считать материал цилиндра локально ортотропным, у которого направления главных осей тензора упругих свойств совпадают с направлениями ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Для обобщенного закона Гука будем использовать матричную форму записи связи между напряжениями и деформациями [10]

$$e_i = s_{ij}\sigma_j, \quad s_{ji} = s_{ij}, \quad \sigma_i = c_{ij}e_j, \quad c_{ji} = c_{ij}, \quad i, j$$

Здесь

$$e_1 = e_{11}, \quad e_2 = e_{22}, \quad e_3 = e_{33}, \quad e_4 = 2e_{34}, \quad e_5 =$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_1 = \sigma_{33},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12},$$

где $\mathbf{e}_{ij}$, σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно.

Упругие свойства ортотропного материала в базисе $\mathbf{e}_j$ определим девятью независимыми техническими постоянными. Податливости выражаются через такие постоянные следующими формулами:

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad s_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad s_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1},$$

$$s_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad s_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad s_{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$s_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad s_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad s_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

$$s_{15} = s_{16} = s_{25} = s_{26} = s_{35} = s_{36} = 0.$$

Замечание 1.1. В случае, когда материал локально трансверсально изотропный,

$$E_1 = E_{21} = E, \quad E_3 = E', \quad G_{12} = G = E / 2(1 + \nu),$$

$$G_{13} = G_{23} = G', \quad \nu_{12} = \nu, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu'.$$

Введем обозначения

$$\varepsilon_1 = \begin{Vmatrix} e_{rr} \\ e_{\theta\theta} \\ e_{zz} \\ 2e_{\theta z} \end{Vmatrix}, \quad S'_l = \begin{Vmatrix} s'_{l1} \\ s'_{l2} \\ s'_{l3} \\ s'_{l4} \end{Vmatrix}, \quad l = 1, \ldots, 4, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_2 = \begin{Vmatrix} 2e_{rz} \\ 2e_{r\theta} \end{Vmatrix}, \quad S'_5 = \begin{Vmatrix} s'_{55} \\ s'_{56} \end{Vmatrix}, \quad S'_6 = \begin{Vmatrix} s'_{65} \\ s'_{66} \end{Vmatrix}.$$

В результате перехода от базиса $\mathbf{e}_j$ к базису $\mathbf{e}'_i$ получаем следующие соотношения обобщенного закона Гука в сопутствующей системе координат:

$$\varepsilon_1 = S'_1\sigma_{rr} + S'_2\sigma_{\theta\theta} + S'_3\sigma_{zz} + S'_4\sigma_{\theta z}, \quad \varepsilon_2 = S'_5\sigma_{rz} + S$$

$$s'_{11} = s_{11}, \quad s'_{12} = (s_{12} + x^2 s_{13})/g^2,$$

$$s'_{22} = (s_{13} + x^2 s_{12})/g^2, \quad s'_{14} = -2x(s_{12} - x^2 s_{13})/g^2,$$

$$s'_{22} = (s_{22} + 2x^2 s_{23} + x^4 s_{33} + x^2 s_{44})/g^4,$$

$$s'_{23} = \left[(1 + x^4)s_{23} + x^2(s_{22} + s_{33} - s_{44})\right]/g^4,$$

$$s'_{24} = x\left[2(s_{23} - s_{33}) + 2x^2(s_{33} - s_{23}) + (1 - x^2)s_{44}S\right]/ \tag{1.3}$$

$$s'_{33} = \left[s_{33} + 2x^2(s_{23} + x^4 s_{22} + x^2 s_{44})\right]/g^4,$$

$$s'_{34} = x\left[2(s_{33} - s_{23}) + 2x^2(s_{23} - s_{22}) - (1 - x^2)s_{44}S\right]/$$

$$s'_{44} = \left[(1 - x^2)^2 s_{44} + 4x^2(s_{22} - 2s_{23} + s_{33})\right]/g^4,$$

$$s'_{55} = (s_{55} + x^2 s_{66})/g^2, \quad s'_{56} = x(s_{55} - s_{66})/g^2,$$

$$s'_{55} = (s_{66} + x^2 s_{55})/g^2, \quad s'_{ij} = s'_{ji}.$$

Замечание 1.2. Аналогичные формулы связи модулей c'_{ij} и c_{ij} для локально трансторопного материала приведены в [7–9].

Компоненты тензора деформаций в базисе сопутствующей системе координат выражаются через смещения u_r, u_θ, u_z следующими формулами:

$$e_{rr} = \partial_r u_r, \quad e_{\theta\theta} = (u_r + \partial_\theta u_\theta)/r, \quad e_{zz} = Du_z,$$

$$2e_{r\theta} = \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/r, \quad 2e_{rz} = \partial_r u_z + Du_r, \tag{1.4}$$

$$2e_{z\theta} = \partial_\theta u_z + Du_\theta.$$

Уравнения равновесия в напряжениях в данном случае имеют вид

$$\partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta\sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} = 0,$$

$$\partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} = 0, \qquad (1.5)$$

$$\partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta\sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} = 0.$$

В формулах (1.4), (1.5)

$$\partial_r = \partial/\partial r, \quad \partial_\theta = \partial/\partial\theta, \quad \partial = \partial/\partial z, \quad D = \partial$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений, т.е.

$$n_r\sigma_{rr} + n_\theta\sigma_{r\theta} = 0, \quad n_r\sigma_{r\theta} + n_\theta\sigma_{\theta\theta} = 0, \quad n_r\sigma_{rz} + n_{\text{(}} \qquad (1.6)$$

Введя вектор смещений $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$, поставленную задачу можно представить в векторно-операторном виде

$$M(\partial, \tau)\mathbf{u} \equiv \partial^2 A_0\mathbf{u} + \partial A_1\mathbf{u} + A_2\mathbf{u} = 0, \qquad (1.7)$$

$$N(\partial, \tau)\mathbf{u} \equiv (\partial B_0\mathbf{u} + B_1\mathbf{u})\big|_\Gamma = 0, \qquad (1.8)$$

Здесь (1.7) — операторный вид уравнения равновесия в смещениях, (1.8) — операторный вид граничного условия (1.6), A_k, B_i — матричные дифференциальные операторы по переменным r, θ нулевого, первого и второго порядков соответственно; конкретный вид этих операторов здесь не приводится из-за их громоздкости и очевидности способа построения. Заметим только, что в силу соотношений (1.3) коэффициенты этих операторов зависят от r и τ, но не зависят от z.

Отыскивая решение задачи (1.7), (1.8) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}e^{\gamma z},$$

получаем спектральную задачу на сечении

$$M(\gamma)\mathbf{a} = 0, \quad N(\gamma)\mathbf{a} = 0. \qquad (1.9)$$

Общая структура спектра, свойства системы собственных и присоединенных векторов (в том числе соотношения обобщенной ортогональности) уравнений типа (1.9), а также свойства элементарных решений достаточно подробно описаны в [9, 11, 12]. В [4, 9, 13, 14] показано, что решение задачи Сен-Венана о растяжении, кручении и изгибе цилиндра, естественно-закрученного стержня и пружины является линейной комбинацией двенадцати элементарных решений. Аналогичное представление имеет место и для цилиндра с винтовой анизотропией. Эту группу элементарных решений будем называть элементарными решениями Сен-Венана.

2. РЕШЕНИЕ СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Обратимся вначале к построению элементарных решений Сен-Венана. Для определения точек спектра, "ответственных" за эти элементарные решения, запишем вектор твердого смещения в сопутствующей системе координат. Имеем

$$u_r^0 = C_1 e^{i\psi} + C_2 e^{-i\psi} + zC_3 e^{i\psi} + zC_4 e^{-i\psi},$$

$$u_\theta^0 = iC_1 e^{i\psi} - iC_2 e^{-i\psi} + izC_3 e^{i\psi} - izC_4 e^{-i\psi} - C_6 r, \tag{2.1}$$

$$u_z^0 = -C_3 r e^{i\psi} - C_4 r e^{-i\psi} + C_5,$$

$$\psi = \tau z + \theta, \quad C_1 = (a_1^0 - ia_2^0)/2, \quad C_2 = \bar{C}_1, \quad C_3$$

$$C_4 = \bar{C}_3, \quad C_5 = a_3^0, \quad C_6 = \omega_3.$$

Здесь a_k^0, ω_k — проекции вектора поступательного смещения и поворота цилиндра как твердого тела на оси основной системы координат, черта над переменной означает комплексное сопряжение.

Из формул (2.1) вытекает, что

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = i\tau, \quad \gamma_{-1} = -i\tau$$

являются собственными значениями спектральной задачи (1.9). Кратность каждого из них равна четырем, а структура их корневых подпространств остается такой же, как и в случае естественно-закрученного стержня [5, 9], что позволяет в случае цилиндра с кольцевым поперечным сечением $r_1 \le r \le r_2$ записать элементарные решения Сен-Венана в виде

$$\mathbf{u}_1(z) = \mathbf{a}_5, \quad \mathbf{u}_2(z) = \mathbf{a}_6, \quad \mathbf{u}_3(z) = e^{i\psi}\mathbf{a}_3,$$

$$\mathbf{u}_4(z) = \bar{\mathbf{u}}_3(z), \quad \mathbf{u}_5(z) = e^{i\psi}(\mathbf{z}\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_5), \quad \mathbf{u}_6(z) = \bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{u}_9(z) = e^{i\psi}\left(\frac{z^2}{2}\mathbf{a}_3 + z\mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_9\right), \quad \mathbf{u}_{10}(z) = \bar{\mathbf{u}}_9(z), \tag{2.2}$$

$$\mathbf{u}_{11}(z) = e^{i\psi}\left(\frac{z^3}{6}\mathbf{a}_3 + \frac{z^2}{2}\mathbf{a}_5 + z\mathbf{a}_9 + \mathbf{a}_{11}\right), \quad \mathbf{u}_{12}(z) = \bar{\mathbf{u}}$$

Здесь

$$\mathbf{a}_1 = \{0,0,1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{0,r,0\}, \quad \mathbf{a}_3 = \{1,i,0\}, \quad \mathbf{a}_4$$

$$\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_6 = \{0,0,-r\}, \quad \mathbf{a}_l = \{a_{r,l}, a_{\theta,l}, a_{z,l}\}, \quad l = 7,8 \tag{2.3}$$

$$\mathbf{a}_9 = \{a_{r,9}, ia_{\theta,9}, a_{z,9}\}, \quad \mathbf{a}_{10} = \bar{\mathbf{a}}_9, \quad \mathbf{a}_{11} = \{ia_{r,7}, a_{\theta,7}, i$$

В рассматриваемом случае цилиндра с кольцевым поперечным сечением компоненты векторов $\mathbf{a}_l$ $(l = 7, \ldots, 12)$ зависят только от r, а краевые задачи для их определения получаются на основе соотношений (1.4)–(1.8), при подстановки в них (2.2), (2.3).

Рассмотрим подробно задачу по определению компонент вектора $\mathbf{a}_7$. Используя соотношения (1.2), (1.3) и вводя обозначения

$$\Sigma_{1,k} = \left\| \begin{matrix} \sigma_{rr,k} \\ \sigma_{\theta\theta,k} \\ \sigma_{zz,k} \\ \sigma_{\theta z} \end{matrix} \right\|, \quad C'_l = \left\| \begin{matrix} c'_{l1} \\ c'_{l2} \\ c'_{l3} \\ 2c'_{l4} \end{matrix} \right\|, \quad l = 1, \ldots, 4, \quad k = 7$$

$$\Sigma_{2,k} = \left\| \begin{matrix} \sigma_{rz,k} \\ \sigma_{r\theta,k} \end{matrix} \right\|, \quad C'_5 = \left\| \begin{matrix} c'_{55} \\ c'_{56} \end{matrix} \right\|, \quad C'_6 = \left\| \begin{matrix} c'_{65} \\ c'_{66} \end{matrix} \right\|, \tag{2.4}$$

для компонент тензора напряжений получаем выражения

$$\Sigma_{1,7} = C'_1 \frac{da_{r,7}}{dr} + \frac{1}{7} C'_2 a_{r,7} + C'_3, \quad \Sigma_{2,7} = C'_5 \frac{da_{z,7}}{dr} + C \tag{2.5}$$

Из уравнений равновесия (1.5) и граничных условий (1.6) $(n_r = 1, n_\Theta = 0)$ имеем

$$\partial_r (r\sigma_{rr,7}) - \sigma_{\theta\theta,7} = 0, \quad \sigma_{rr,7}(r_\alpha) = 0, \tag{2.6}$$

$$\partial_r (r\sigma_{r\theta,7}) + \sigma_{r\theta,7} = 0, \quad \sigma_{r\theta,7}(r_\alpha) = 0, \tag{2.7}$$

$$\partial_r (r\sigma_{rz}) = 0, \quad \sigma_{rz}(r_\alpha) = 0. \tag{2.8}$$

Из уравнений (2.7), (2.8) вытекает, что

$$\sigma_{r\theta,7} = \sigma_{rz,7} = 0.$$

Из этих соотношений и выражений (2.7) для $\sigma_{r\theta,7}$, $\sigma_{rz,7}$ следует, что

$$a_\theta = X_1 r + X_0, \quad a_z = X_2,$$

где X_0, X_1, X_2 — произвольные постоянные, которые можно положить равными нулю.

Подставляя выражения для $\sigma_{rr,7}$, $\sigma_{\theta\theta,7}$ из (2.5) в (2.6), для определения получаем краевую задачу для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка

$$Za_{r,7} = F_7, \quad l\, a_{r,7}\big|_{r=r_\alpha} = f_{\alpha,7}, \tag{2.9}$$

$$Za \equiv \frac{d}{dr}\left(rc'_{11} \frac{da}{dr} + c'_{12} a \right) - c'_{12} \frac{da}{dr} - \frac{1}{r} c'_{22} a, \quad la \equiv c'_{11}$$

$$F_7 = -\frac{d(rc'_{13})}{dr} + c'_{23}, \quad f_{\alpha,7} = -c'_{13}(r_\alpha).$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\mathbf{a}_8 = \{a_{r,8}, 0, 0\}.$$

И в этом случае определение $a_{r,8}$ сводится к краевой задаче (2.9) с новыми правыми частями

$$F_8 = -\frac{d(r^2 c'_{14})}{dr} + rc'_{24}, \quad f_{\alpha,8} = -r_\alpha c'_{14}(r_\alpha).$$

Напряжения определяются следующими формулами:

$$\Sigma_{1,8} = C'_1 \frac{da_{r,8}}{dr} + \frac{1}{r} C'_2 a_{r,8} + rC'_4, \quad \Sigma_{1,8} = 0. \tag{2.10}$$

Введем обозначения

$$B_{1,l} = \begin{Vmatrix} b_{rr,l} \\ b_{\theta\theta,l} \\ b_{zz,l} \\ b_{\theta z,l} \end{Vmatrix}, \quad B'_{2,l} = \begin{Vmatrix} b_{rz,l} \\ b_{r\theta,l} \end{Vmatrix}, \quad l = 9, 11.$$

Для элементарного решения $\mathbf{a}_9$ соответствующие ему напряжения определяются по следующим формулам:

$$\Sigma_{rr,9} = e^{i\psi} B_{1,9}, \quad \Sigma_{\theta\theta,9} = e^{i\psi} B_{2,9}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} B_{1,9} &= C'_1 \frac{da_{r,9}}{dr} + \frac{a_{r,9} - a_{\theta,9}}{r} - C'_3 r - C'_4 \frac{a_{z,9}}{r}, \\ B_{2,9} &= C'_5 \frac{da_{z,9}}{dr} + C'_6 \left(\frac{da_{\theta,9}}{dr} + \frac{a_{r,9} - a_{\theta,9}}{r} \right), \end{aligned} \tag{2.12}$$

В этом случае все компоненты вектора $\mathbf{a}_9$ отличны от нуля и определяются интегрированием краевой задачи, которая получается после подстановки выражений (2.12) в следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{d(rb_{rr,9})}{dr} - b_{r\theta,9} - b_{\theta\theta,9} = 0, \quad b_{rr,9}(r_\alpha) = 0, \\ &\frac{d(rb_{r\theta,9})}{dr} + b_{r\theta,9} + b_{\theta\theta,9} = 0, \quad b_{r\theta,9}(r_\alpha) = 0, \\ &\frac{d(rb_{rz,9})}{dr} + b_{z\theta,9} = 0, \quad b_{rz,9}(r_\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Как следует из первых двух уравнений (2.13), эта система имеет первый интеграл

$$b_{rr,9} + b_{r\theta,9} = 0.$$

Для элементарного решения $\mathbf{a}_{11}$ соответствующие ему напряжения определяются по формулам

$$\Sigma_{1,11} = e^{i\psi}\left(zB_{1,9} + iB_{1,11}\right), \quad \Sigma_{2,11} = e^{i\psi}\left(izB_{2,9} + B_{2,11}\right) \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} B_{1,11} &= C_1' \frac{da_{r,11}}{dr} + C_2' \frac{a_{r,11} + a_{\theta,11}}{r} + C_4' \frac{a_{z,11}}{r} + C_3' a_{z,9} + (\\ B_{2,11} &= C_5' \frac{da_{z,11}}{dr} + C_6' \left(\frac{da_{\theta,11}}{dr} + \frac{a_{r,11} + a_{\theta,11}}{r} \right) + C_5' a_{r,9} . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Подстановка выражений (2.14) в уравнения равновесия и граничные условия приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{d(rb_{rr,11})}{dr} + b_{r\theta,11} - b_{\theta\theta,11} + rb_{rz,9} = 0, \quad b_{rr,11}(r_\alpha) = 0, \\ &\frac{d(rb_{r\theta,11})}{dr} + b_{r\theta,11} - b_{\theta\theta,11} + rb_{z\theta,9} = 0, \quad b_{r\theta,11}(r_\alpha) = 0, \\ &\frac{d(rb_{rz,11})}{dr} - b_{z\theta,11} + rb_{zz,9} = 0, \quad b_{rz,11}(r_\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Эти соотношения после подстановки в них выражений (2.15) приводят к краевой задаче для трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент $a_{r,11}$, $a_{\theta,11}$, $a_{z,11}$. Из первых двух уравнений (2.16) вытекает следующий первый интеграл:

$$b_{rr,11} - b_{r\theta,11} = \frac{1}{r}\int_{r_1}^{r} (b_{rz,9} - b_{\theta z,9})\, rdr .$$

Рассмотрим теперь задачу Сен-Венана. Будем считать, что на торцах цилиндра заданы следующие граничные условия:

$$u_j = 0 \qquad \text{при } z = 0, \tag{2.17}$$

$$\sigma_{j3} = p_j \qquad \text{при } z = L. \tag{2.18}$$

Здесь u_j, p_j — проекции вектора смещений и вектора заданных внешних усилий на оси основной системы координат.

Решение Сен-Венана будем искать в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{l=1}^{6} C_l \mathbf{u}_l(z) + \sum_{l=7}^{12} C_l \mathbf{u}_l(z - L), \tag{2.19}$$

$$\sigma = \{\sigma_{rz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{zz}\} = \sum_{l=7}^{12} C_l \sigma_l(z - L). \tag{2.20}$$

Удовлетворяя граничному условию (2.18) в интегральном смысле и используя соотношения обобщенной ортогональности [10], получаем

$$d_{11}C_7 + d_{12}C_8 = Q_3\,, \quad d_{12}C_7 + d_{22}C_8 = M_3\,,$$

$$d_{33}C_9 + d_{35}C_{11} = M_2 + iM_1\,, \quad d_{33}C_{11} = -Q_1 + iQ_2\,, \tag{2.21}$$

$$C_8 = \bar{C}_7\,, \quad C_{12} = \bar{C}_{11}\,.$$

Здесь

$$d_{11} = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{zz,7}dr\,, \quad d_{12} = 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r\sigma_{zz,8}dr\,, \quad d_{22} = 2$$

$$d_{33} = -2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^2 b_{zz,9}dr\,, \quad d_{35} = 2\pi i\int_{r_1}^{r_2} r^2 b_{zz,11}dr\,, \tag{2.22}$$

Q_j, M_j — проекции главного вектора и главного момента внешних усилий на оси основной системы координат.

Соотношения (2.21), (2.22) позволяют дать следующую интерпретацию элементам матрицы жесткостей: d_{11} — жесткость стержня на растяжение-сжатие, d_{22} — жесткость на кручение, d_{12} — коэффициент связи растяжения-сжатия и кручения, d_{33} — жесткость на изгиб.

Соотношения (2.21), (2.22) являются точными в том смысле, что погранслойная часть решения трехмерной задачи, которая порождается самоуравновешенной частью внешних напряжений (2.18), не влияет на их вид.

Постоянные C_l, $l = 1,\ldots,6$ определяются при удовлетворении граничным условиям (2.17). Точные их значения можно определить только на основе решения бесконечных систем алгебраических уравнений, аналогичных построенным ранее [13] для изотропного цилиндра. В случае длинных цилиндров ($\varepsilon = r_2/L << 1$) эти постоянные определяются следующими приближенными формулами:

$$C_1 = -LC_7\,, \quad C_2 = -LC_8\,, \quad C_3 = -\frac{1}{2}L^2C_{11}e^{-i\tau L}\,,$$

$$C_4 = \bar{C}_3\,, \quad C_5 = \left(\frac{1}{6}L^3C_{11} - \frac{1}{2}L^2C_9\right)e^{-i\tau L}\,, \quad C_6 = \bar{C} \tag{2.23}$$

3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Обратимся к вопросу о построении решений задач (2.9), (2.12), (2.13), (2.16) и вычислению на их основе элементов матрицы жесткостей d_{ij}.

Остановимся вначале на построении аналитических решений методом малого параметра в предположении, что безразмерный параметр $\tau_0 = \tau r_2 << 1$.

Такие решения, помимо того что позволяют получить наглядное представление о влиянии различных параметров задачи на ее решение, полезны как тест для численного решения.

Для построения приближенных решений обратимся к формулам (1.2), (1.3). На их основе, считая материал локально трансверсально изотропным с главной осью, направленной по касательно к винтовой линии, для главных членов разложений c'_{ml} в ряды по τ получаем следующие выражения:

$$\begin{gathered} c'_{11} = c'_{22} = c_{11}, \quad c'_{12} = c_{12}, \quad c'_{13} = c'_{23} = c_{13}, \\ c'_{33} = c_{33}, \quad c'_{44} = c'_{55} = c_{44}, \quad c'_{66} = c_{66}, \\ c'_{14} = \tau r(c_{13} - c_{12}), \quad c'_{24} = \tau r(c_{13} + 2c_{44} - c_{11}), \\ c'_{34} = \tau r(c_{33} - c_{13} - 2c_{44}), \quad c'_{56} = \tau r(c_{44} - c_{66}). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Будем искать решение краевой задачи (2.8) в виде

$$a_{r,7} = a_7^{(0)} + \tau a_7^{(1)} + \ldots. \tag{3.2}$$

После подстановки выражений (3.1), (3.2) в соотношения (2.9) для определения главного члена получаем краевую задачу

$$\frac{d^2 a_7^{(0)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{da_7^{(0)}}{dr} - \frac{a_7^{(0)}}{r^2} = 0, \quad \left(c_{11}\frac{da_7^{(0)}}{dr} + c_{12}\frac{a_7^{(0)}}{r} \right)_{r=r_1}$$

Опуская дальнейшие элементарные этапы интегрирования, приведем окончательный вид решения. Имеем

$$a_{r,7} = -\nu' r + O(\tau^2). \tag{3.3}$$

Аналогичным образом получаем

$$a_{r,8} = \frac{\tau r_2}{8c_{11}} \left\{ K_0 \frac{r^3}{r_2^2} + K_1 \left[\frac{(1+\rho^2)r}{c_{11}+c_{12}} + \frac{\rho^2 r_2^2}{r(c_{11}-c_{12})} \right] \right\} + \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} a_{r,9} = \frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau^2), \quad a_{\theta,9} = -\frac{\nu' r^2}{2} + O(\tau^2), \\ a_{z,9} = \frac{\tau K_2}{8}\left[r^3 - 3(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{3r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^3), \\ a_{z,11} = \frac{\tau K_2}{8}\left[r^3 - \kappa(r_1^2 + r_2^2) - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r} \right] + O(\tau^2), \\ a_{r,11} = O(\tau), \quad a_{\theta,11} = O(\tau). \end{gathered}$$

В формулах (3.3), (3.4)

$$E' = c_{33} - 2\nu' c_{13}, \quad G' = c_{44},$$

$$K_0 = 3c_{12} - 2c_{13} - c_{11} + 2c_{44},$$

$$K_1 = -3c_{12}^2 + 3c_{11}^2 - 2c_{13}(c_{11} - c_{12}) - 2c_{44}(2c_{12} + 6c_{11})$$

$$K_2 = E' - 2(1+\nu')G', \quad \kappa = 3K_2 + \nu' G'/2, \quad \rho :$$

$$\nu' = (c_{11} + c_{12})/c_{13}.$$

Приведем выражения для главных членов компонент тензоров напряжений.

В случае $l = 7, 8$ имеем

$$\sigma_{zz,7} = E' + O(\tau^2), \quad \sigma_{\theta z,8} = G' r/r_2 + O(\tau^2), \quad \sigma_r$$

$$\sigma_{rr,7} \sim \sigma_{\theta\theta,7} \sim O(\tau^2), \quad \sigma_{\theta z,7} \sim \sigma_{rr,8} \sim \sigma_{\theta\theta,8} \sim \sigma_{zz,8}$$

В случае $l = 9, 11$ ограничимся тем, что приведем главные члены разложений следов напряжений

$$b_{zz,9} = -E' r + O(\tau^2),$$

$$b_{rz,9} = \frac{\tau K_2}{8}\left(r^2 - r_1^2 - r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) + O(\tau^3),$$

$$b_{\theta z,9} = -\frac{\tau K_2}{8}\left(3r^2 - r_1^2 - r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}\right) + O(\tau^3),$$

$$b_{rr,9} \sim b_{\theta\theta,9} \sim b_{r\theta,9} \sim O(\tau^2),$$

$$b_{rz,11} = G'\left[\left(\frac{3K_2}{8} + \frac{\nu'}{2}\right)r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2)r + \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2}\right],$$

$$b_{\theta z,11} = G'\left[\left(\frac{K_2}{8} - \frac{\nu'}{2}\right)r^2 - \kappa(r_1^2 + r_2^2)r - \frac{\kappa r_1^2 r_2^2}{r^2}\right],$$

$$b_{rr,11} \sim b_{\theta\theta,11} \sim b_{zz,11} \sim b_{r\theta,11} \sim O(\tau).$$

Главные члены разложений имеют вид

$$d_{11}^0 = SE', \quad d_{22}^0 = c_{44} J_p,$$

$$d_{12}^0 = \tau J_p K_2, \quad d_{33} = E' J_p, \quad d_{31} = O(\tau),$$

$$S = \pi(r_2^2 - r_1^2), \quad J_p = \pi(r_2^4 - r_1^4)/2.$$

Формула для d_{12}^0 дает представление о влиянии параметров задачи на взаимодействия кручения с растяжением-сжатием при малых значениях. Следует отметить, что коэффициент K_2 характеризует степень локальной анизотропии трансверсально-изотропного материала. Для изотропного материала $K_2 = 0$.

Для оценки влияния на элементы d_{ij} параметров τ_0 и ρ в широком диапазоне их изменения была проведена серия расчетов на основе численного интегрирования задач по определению компонент $a_{r,7}$, $a_{r,8}$. Для расчетов был выбран волокнистый композиционный материал со следующими приведенными упругими характеристиками:

$$E' = 3,685 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad E = 9,398 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad G'$$
$$\nu' = 0,0147, \quad \nu = 0,375.$$

При пересчете на постоянные c_{ij} получается

$$c_{11} = 5,294 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{12} = 1,770 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{13}$$
$$c_{33} = 3,688 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad c_{44} = G'.$$

На *рис. 1* приведены зависимости безразмерных элементов матрицы жесткости

$$D_{11} = \frac{d_{11}}{d_{11}^0}, \quad D_{22} = \frac{d_{22}}{d_{22}^0}, \quad D_{12} = \frac{d_{12}}{J_p B},$$

от τ_0 при $\rho = 0,1$ (сплошные линии); на *рис. 2* приведены также зависимости D_{12} от τ_0 при $\rho = 0,1;\ 0,4;\ 0,8$ (кривые 1, 2, 3 соответственно).

Кривые, описывающие поведение D_{12}, указывают на то, что при растяжени цилиндра в случае малых значений параметра имеет место эффект "раскручивания", а при достаточно больших значениях — эффект "закручивания".

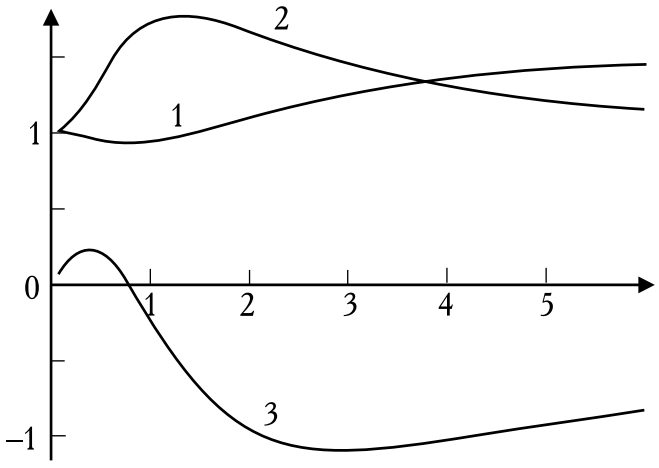


Рис. 1

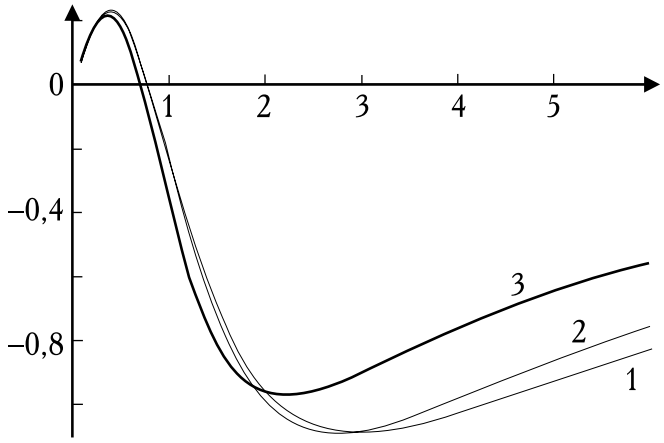


Рис. 2

4. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Одним из мотивов, стимулирующих построение основных соотношений для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией, является механическая структура стенок артериальных кровеносных сосудов и связанное с этой структурой явление винтового движения крови. Более подробно речь об этом явлении пойдет в следующем параграфе.

Построение основных соотношений для цилиндрической оболочки осуществим, опираясь на гипотезы Киргоффа~Лява. Поскольку во многих источниках указывается на то, что стенка сосуда предварительно напряжена в продольном и окружном направлениях, приведем вариант линеаризованных уравнений, учитывающих эти факторы. Ограничимся осесимметричным случаем.

Обратимся, вначале, к соотношениям (1.2), (1.3). Преобразуя их, полагая $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ и $x = a\tau$, где a — радиус срединной поверхности, получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = g_{11}e_{\theta\theta} + g_{12}e_{zz} + g_{13}e_{\theta z},$$

$$\sigma_{zz} = g_{12}e_{\theta\theta} + g_{22}e_{zz} + g_{23}e_{\theta z}, \qquad (4.1)$$

$$\sigma_{\theta z} = g_{13}e_{\theta\theta} + g_{23}e_{zz} + g_{33}e_{\theta z}.$$

Здесь

$$g_{11} = \left[E_2 + x^2\left(\nu_{32}E_2 + 4G_{23} + 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right) + x^4E_3\right]$$

$$g_{12} = \left[\nu_{32}E_2 + x^2\left(E_2 + E_3 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right) + x\right.$$

$$g_{22} = \left[E_3 + x^2\left(E_2 + E_3 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right) + x^4E\right.$$

$$g_{13} = x\left[2G_{23}(1-\nu_{23}\nu_{32}) - E_2(1-\nu_{23}) + \right.$$
$$\left. + x^2\left(E_3 - \nu_{32}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right)\right] / g_0,$$

$$g_{23} = x\left[-2G_{23}(1-\nu_{23}) + E_3(1-\nu_{23}) + \right.$$
$$\left. + x^2\left(-E_2 - \nu_{23}E_3 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right)\right] / g_0 ,$$

$$g_{33} = \left[G_{32}(1-\nu_{23}\nu_{32})(1-x^2)^2 + \right.$$
$$\left. + x^2\left(E_2 - \nu_{23}E_2 + E_3 - \nu_{32}E_3 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32}\right)\right],$$

$$g_0 = (1+x^2)^4(1-\nu_{23}\nu_{32}) .$$

Упрощения на основе гипотезы единой нормали приводят к выражениям

$$e_{\theta\theta} = e_1^0 + ye_1^1 , \quad e_{zz} = e_2^0 + ye_2^1 , \quad 2e_{\theta z} = e_3^0 + ye_3^1 ,$$

$$e_1^0 = u_r^0 / a , \quad e_2^0 = \partial u_z^0 , \quad e_3^0 = \partial u_\theta^0 ,$$

$$e_1^1 = -u_r^0 / a^2 , \quad e_2^1 = -\partial^2 u_r^0 , \quad e_3^1 = 0 ,$$

где u_r^0, u_θ^0, u_z^0 — смещения точек срединной поверхности, $-h/2 \le y \le h/2$, h — толщина оболочки.

В принятых выше обозначениях выражения для усилий и моментов можно записать в следующем виде:

$$T_i = hg_{ij}e_j^0 , \quad M_i = h^3 g_{ij}e_j^1 / 12 ,$$

где

$$T_1 = T_{\theta\theta} , \quad T_2 = T_{zz} , \quad T_3 = T_{\theta z} , \quad M_1 = M_{\theta\theta} ,$$

Замыкают цепочку основных соотношений уравнения движения

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} - \frac{T_1}{a} + T_\theta^0 \frac{u_r^0}{a^2} + T_z^0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial t^2} + q_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_z = 0 , \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial z} + \frac{\partial T_3}{\partial z} - \frac{T_{\theta z}^0}{a}\frac{\partial u_r^0}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_\theta = 0 .$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки, T_θ^0, T_r^0, $T_{\theta z}^0$ — усилия предварительно-напряженного состояния.

Для того, чтобы получить представление о взаимодействии продольных и крутильных деформаций при динамических процессах, рассмотрим задачу о распространении гармонических волн.

Решение будем отыскивать в виде

$$u_j = U_j e^{i(k\zeta - \omega t)} , \quad \zeta = z/a , \qquad (4.3)$$

где U_j — произвольные постоянные, $j = 1, 2, 3$ символизирует r, z, θ.

Полагая в (4.2) $q_r = q_\theta = q_z = 0$ и подставляя (4.3), получим однородную алгебраическую систему

$$l_{ij}U_j = 0.$$

Определитель этой системы является дисперсионным уравнением, корни которого $k(\omega)$ определяют множество нормальных волн (мод). При $T^0_{\theta\theta} = T^0_{zz} = T^0_{\theta z} = 0$ в низкочастотной области всегда существуют четыре вещественных корня $\pm k_1, \pm k_2$, которые для достаточно тонких оболочек можно найти на основе безмоментной теории. Этим корням соответствуют однородные (незатухающие) моды. Учет моментных слагаемых при малых ω дает еще две пары комплексных корней, а соответствующие им моды описывают краевой эффект. Ниже U_{j1}, U_{j2} — компоненты амплитуды, соответствующие k_1, k_2.

Чтобы получить представление об особенностях волновых процессов в низкочастотной области при винтовой анизотропии, на основе безмоментной теории была проведена серия расчетов. Для этого при фиксированных значениях упругих и геометрических параметров и для значений частоты $\omega = 4\pi n$, $n = 1, \ldots, 10$ численно строились зависимости фазовых скоростей $c_s = a\omega / k_s$ $(s = 1, 2)$ от параметра α $(\operatorname{tg}\alpha = x)$. Здесь будет уместно заметить, что "степень" винтовой анизотропии определяется величинами коэффициентов g_{13}, g_{23}, которые в свою очередь определяются значениями геометрического параметра $\alpha \in [0, 90^\circ]$ и локальной анизотропией материала (для изотропного материала $g_{13} = g_{23} = 0$ при любых значениях α).

В качестве примера на *рис. 3* приводятся зависимости фазовых скоростей $c_{sq}(\alpha)$ $(q = 1, 2)$ при $\omega = 4\pi$ для двух оболочек, у которых параметры $E_2 = 4,905 \cdot 10^5$ кН/м^2, $E_3 = 0,833 \cdot E_2$, $\nu_{32} = 0,4$, $a = 7,3 \cdot 10^{-3}$ одинаковые, а модуль сдвига $G_{32} = E_2/6$ для $q = 1$ и $G_{32} = E_2/4$ для $q = 2$.

Кривые 1, 2 отражают зависимости от α нормированных фазовых скоростей c^0_{11}, c^0_{12} "квази-продольных" мод, у которых при $\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$, т.е. когда винтовая анизотропия отсутствует, $U_{11} \neq 0, U_{21} \neq 0, U_{31} = 0$. Кривые 3, 4

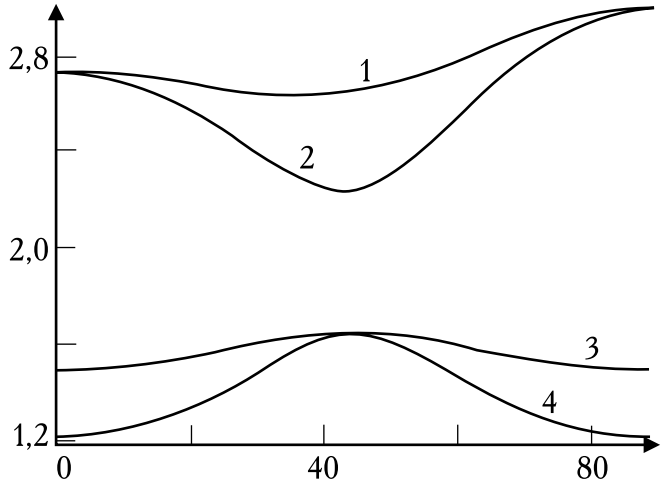


Рис. 3

описывают поведение нормированных фазовых скоростей c_{21}^0, c_{22}^0 "квази-крутильных" мод, у которых $U_{12} = U_{22} \equiv 0, U_{32} \neq 0$ при $\alpha = 0, \alpha = 90^\circ$. Здесь и ниже $c_{sq}^0 = c_{sq} / c_0$, где

$$c_0^2 = \frac{hE_2}{2a\rho_0}$$

есть фазовая скорость волны давления [14]. Для выбранных материалов $c_0 = 4{,}227$ м/с.

Для того, чтобы получить представление об эффекте кручения на квазипродольной моде и эффекте продольно-радиальных колебаний на квазикрутильной моде, численно исследовались зависимости от безразмерных амплитудных коэффициентов

$$m_{jsq} = U_{jsq} / U_{sq}, \quad U_{sq} = \sqrt{U_{1sq}^2 + U_{2sq}^2 + U_{3sq}^2}.$$

На *рис. 4* отражены зависимости $m_{j1q}(\alpha)$, что соответствует фазовым скоростям c_{1q}. На *рис. 5* отражены зависимости $m_{j2q}(\alpha)$, что соответствует фазовым скоростям c_{2q}. На *рис. 4* кривая 1 отражает поведение m_{z11}, кривая 2 — $m_{\theta 12}$, кривая 3 — m_{z12}, кривая 4 — $m_{\theta 12}$. На *рис. 5* кривая 1 отражает поведение m_{z21}, кривая 2 — $m_{\theta 21}$, кривая 3 — m_{z22}, кривая 4 — $m_{\theta 22}$.

Обращает на себя внимание смена знаков фаз амплитудных коэффициентов $m_{\theta 1q}$ и m_{z2q}. При $0 \le \alpha \le \alpha_0$ знаки фаз m_{z1q}, $m_{\theta 1q}$ противоположны, что соответствует эффекту "раскручивания", при $\alpha_0 \le \alpha \le 90^\circ$ фазы m_{z1}, $m_{\theta 1}$ совпадают, что соответствует эффекту "закручивания" при растяжении. Этот эффект аналогичен явлению, отмеченному в конце п. 3. В первом случае $\alpha_0 \approx 43^\circ$, во втором $\alpha_0 \approx 37^\circ$. Кроме того, сравнение кривых 2 и 4 на *рис. 4* лишний раз подтверждает, что максимальные значения $|m_{\theta 1}|$ существенно зависят от степени локальной анизотропии. В обоих случаях $|m_{\theta 1}|$ имеют по два максимальных значения. В первом случае при $\alpha_1 \approx 30^\circ$ $\max|m_{\theta 1}| = 0{,}205$, при $\alpha_2 \approx 58^\circ$ $\max|m_{\theta 1}| = 0{,}255$, во втором случае при $\alpha_1 \approx 22^\circ$ $\max|m_{\theta 1}| = 0{,}046$, при $\alpha_2 = 61^\circ$ $\max|m_{\theta 1}| = 0{,}09$.

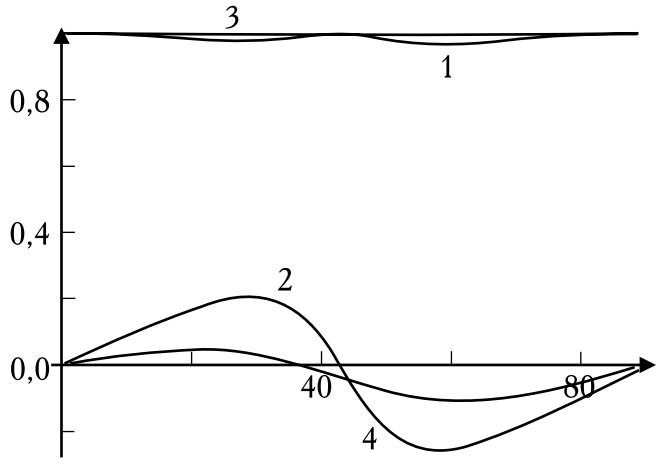


Рис. 4

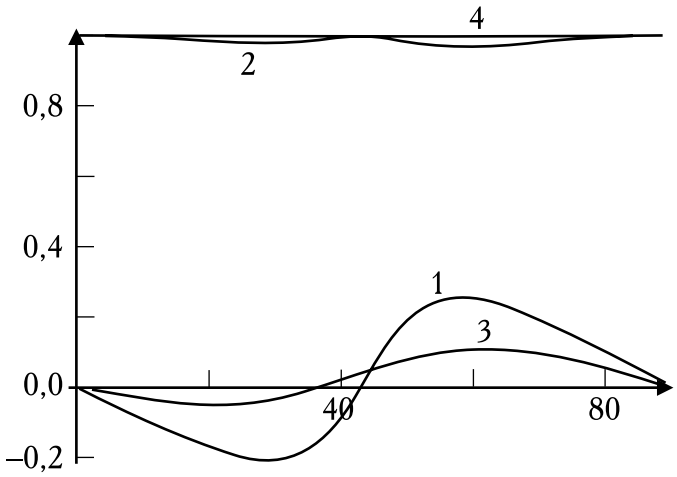


Рис. 5

Замечание 4.1. Коэффициенты m_{r1}, m_{r2} на два-три порядка меньше $m_{\theta 1}$, m_{z2}.

Замечание 4.2. Для указанного выше диапазона изменения частоты поведение всех кривых изменяется незначительно не только качественно, но и количественно.

5. О ВИНТОВОМ ДВИЖЕНИИ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНЫХ СОСУДАХ

На ряде сайтов Интернет (список их см. в конце статьи) анонсировано открытие: "Явление образования винтового потока крови в сердечно-сосудистой системе человека и животных". В частности, сотрудниками ИЛФ СО РАН (Новосибирск) С.Н. Багаевым, В.Н. Захаровым, В.А. Орловым в информативном сообщении "Новое в биомеханике кровообращения" говорится, что "Обнаружено явление образования винтового потока крови в сердечно-сосудистой системе человека и животных, заключающееся в том, что в сердце и кровеносных сосудах при кровообращении возникает вращательно-поступательное движение крови, обусловленное спиральной ориентацией мышечных элементов сердца и кровеносных сосудов". В докладе председателя СО РАН академика Н. Добрецова на Общем собрании СО РАН 24.04.2003 сообщается, что "Исследованиями Институтов лазерной физики, теоретической и прикладной механики и Цитологии и генетики обнаружено, что в сердечно-сосудистой и других транспортных системах организма существует винтовое движение биологических сред. Основой такого движения является взаимодействие стенок транспортных каналов со средой за счет волны скручивания, генерируемой спиралью и мышечными элементами...".

Следует отметить, что на возникновение закрученного потока в сердце вследствие его геометрической формы и механической структуры миокарда указывалось еще в [15]. В этой же работе предложена модель инженерного типа, опирающаяся на принципы работы насосов различных типов.

Причины, приводящие к винтовому движению крови, могут быть разными. В частности, в [3] содержится обзор работ, в которых показывается, что

на участках, где артериальный сосуд имеет кривизну, возникает крутильная по отношению к оси сосуда составляющая скорости. В артериях, непосредственно примыкающих к сердцу, причиной винтового движения может служить вихревое движение в самом сердце, которое возникает во время систолы в силу отсутствия геометрической симметрии желудочка и симметрии механических свойств стенки сердца.

Причиной винтового движения могут также служить механические свойства стенок сосуда.

5.1. О структуре стенки артериального кровеносного сосуда

Накопленный обширный экспериментальный материал [3, 15] позволяет рассматривать стенки артериальных сосудов как многослойные анизотропные оболочки. Согласно этим работам стенки всех артерий имеют сходное строение и состоят из одних и тех же материалов. Соотношения между материалами в стенках сосудов разных отделов системы кровообращения различны. Традиционно стенка делится на три слоя: внутреннюю (интима), среднюю (медия) и наружную (адвентиция). Принято считать, что влияние интимы и адвентиции на механические свойства стенки незначительны. Упругие свойства оболочки определяются медией, которая в крупных и мелких артериях имеет различное строение. В крупных она состоит из множества концентрических слоев упругой ткани: эластина и мышечной ткани, оплетенных тончайшими волокнами коллагена. Полости между слоями заполнены различными губчатыми тканями и жидкостью. В мелких сосудах средний слой почти полностью состоит из спирально расположенных гладкомышечных клеток, размещенных также в виде слоев с незначительным количеством коллагена и эластина. На эластин, коллаген и мышечную ткань приходится около 50% материала стенки. В [3] указывается на то, что мышечные волокна в среднем слое стенки сосуда располагаются наклонно (в некоторых работах отмечается, что угол между направлением волокон и продольной осью сосуда составляет 30°–50°).

Таким образом материал стенки можно рассматривать как композит, упругие свойства которого определяются его компонентами: эластином, коллагеном, мышечной тканью, их взаимной концентрацией и геометрией распределения.

Отношение толщины стенки к внутреннему диаметру в крупных сосудах изменяются в пределах 0,06–0,08, в мышечных артериях это отношение достигает примерно 0,4. Из этого следует, что применение теории тонкостенных оболочек может быть достаточно корректным только для крупных сосудов.

Приведем некоторые сведения об упругих свойствах отдельных компонент [3].

Эластин — нелинейно упругий материал с модулем Юнга $E \approx 300$ кН/м^2 для деформаций до 40%. Коллаген — более жесткий материал с модулем Юнга $E \approx 10^6$ кН/м^2. Модуль Юнга гладких мышц существенно зависит от физиологического состояния и может меняться в пределах 100–1200 кН/м^2. Согласно экспериментальным данным, приведенным в [16], упругие свойства сосудов изменяются с возрастом.

5.2. Математическая модель пульсового движения крови в артериальных сосудах

В предлагаемой математической модели, как и в [3], колебания стенки сосуда описываются уравнениями безмоментной теории упругих оболочек, а движение крови — линейными уравнениями вязкой несжимаемой жидкости. Отличие состоит в учете винтовой анизотропии стенки сосуда.

Будем считать, что на стенке сосуда выполняются кинематические условия прилипания

$$\partial_t u_r = v_r\,, \quad \partial_t u_z = v_z\,, \quad \partial_t u_\theta = v_\theta\,,$$

а гидродинамическое воздействие на стенку сосуда выражается тем, что в уравнениях (4.2)

$$q_r = \left[p - 2\rho\nu\partial_r v_r\right]_{r=a}\,,$$

$$q_z = -\rho\nu\left[\partial_r v_z + \partial_z v_r\right]_{r=a}\,, \tag{5.1}$$

$$q_\theta = -\rho\nu\left[\partial_r v_\theta - v_\theta / r\right]_{r=a}\,.$$

Здесь v_r, v_z, v_θ — радиальная, осевая и крутильная компоненты вектора скорости, p — давление, ∂_r, ∂_z, ∂_θ, ∂_t — частные производные по соответствующим переменным.

Решение для совместного движения будем искать в виде

$$u_j = U_j e^{i(k\zeta-\omega t)}\,, \quad v_j = V_j(\xi)e^{i(k\zeta-\omega t)}\,, \quad p = p_0 e^{i(k\zeta-\omega}$$
$$\xi = r/a\,, \quad \zeta = z/a\,, \tag{5.2}$$

где на основании решения уравнений гидродинамики в предположении, что $\partial_r p = 0$,

$$V_z = \frac{ika}{\rho\nu\beta^2}\,p_0 + \frac{J_0(\beta\xi)}{J_0(\beta)}\,X_z\,, \quad V_r = \frac{k^2 a}{2\rho\nu\beta^2}\,\xi p_0 - \frac{ik}{\beta}$$

$$V_\theta = \frac{J_1(\beta\xi)}{J_1(\beta)}\,X_\theta\,, \quad \beta^2 = i\gamma^2 - k^2\,, \quad \gamma^2 = a^2\omega/\nu\,. \tag{5.3}$$

Здесь ρ_0, X_z, X_θ, как и U_j — произвольные постоянные, ρ — плотность крови, ν — кинематическая вязкость.

Уравнения движения оболочки (4.2) совместно с соотношениями (5.1)—(5.3) позволяет свести задачу к однородной алгебраической системе уравнений

$$d_{ij}(k)X_j = 0\,, \quad i, j = 1,\ldots,3\,,$$

$$X_1 = X_z\,, \quad X_2 = X_\theta\,, \quad X_3 = p_0\,, \tag{5.4}$$

определитель которой, приравненный нулю, определяет дисперсионное уравнение.

5.3. Некоторые результаты численного анализа

Трудности численного исследования задачи в рамках рассматриваемой модели связаны, главным образом, с отсутствием полного набора данных, необходимых для определения жесткостей оболочки g_{ij}. Поэтому к описываемым ниже результатам численного эксперимента следует относиться как к качественным. Однако не исключено, что они достаточно правильно отражают и количественно некоторые вычисляемые характеристики, например, фазовые скорости.

Численные эксперименты были проведены для различных артериальных сосудов собаки, при этом значения некоторых параметров брались из таблицы 1.1, приведенной в [3]. Так, например, из этой таблицы выбирались значения a, h, E_3, а вязкость ν рассчитывалась по приводимым в таблице значениям чисел Рейнольдса для различных сосудов. Для нахождения численных значений g_{ij}, аналитические выражения которых содержат три модуля упругости, один из модулей (E_3) брался из таблицы, остальные параметры назначались и варьировались. Подбор сопровождался контролем выполнения условий положительной определенности матрицы (g_{ij}). Корни дисперсионного уравнения определялись для частот $\omega_n = 4\pi n$, $n = 1, \ldots, 10$.

Численный и асимптотический анализ показал, что в области низких частот всегда существуют шесть комплексных корней $k_s^+ = k_s$, $k_s^- = -k_s$ ($\operatorname{Im} k_s > 0$, $s = 1, 2, 3$), которым соответствует шесть неоднородных волн. Поэтому общее решение, описывающее распространение волн в направлении $\zeta \geq 0$ при фиксированном значении ω можно представить в виде

$$v_j = \sum_{s=1}^{3} C_s V_{js}(\xi) e^{i(k_s\zeta - \omega t)}, \qquad p = \sum_{s=1}^{3} C_s p_s(\xi) e^{i(k_s\zeta - \alpha} \tag{5.5}$$

где C_s — произвольные постоянные, которые определяются интегральными значениями трех полевых характеристик (например, v_z, v_θ и $\operatorname{grad} p$), задаваемыми на входе при $\zeta = 0$.

По реальной и мнимой частям k_s определялись зависимости фазовых скоростей c_s и коэффициентов затухания K_s от параметра α. При этом расчетное значение одной из фазовых скоростей (в данном случае наименьшей по величине c_3) сравнивалось с экспериментальными, приведенными в [3]. Близость численных и экспериментальных результатов в какой то мере служила подтверждением правильности выбора параметров. Чтобы получить представление об эффекте вращательного движения крови проводился сравнительный анализ величин $V_{rs}(1)$, $V_{zs}(1)$, $V_{\theta s}(1)$, для чего исследовались зависимости от параметра α безразмерных коэффициентов

$$n_{rs} = \frac{V_{rs}(1)}{V_s}, \qquad n_{zs} = \frac{V_{zs}(1)}{V_s}, \qquad n_{\theta s} = \frac{V_{\theta s}(1)}{V_s},$$

$$V_s = \sqrt{V_{rs}^2(1) + V_{zs}^2(1) + V_{\theta s}^2(1)}.$$

Расчеты показали,что при изменении в указанном выше диапазоне:

1) c_s, K_s, V_{js} практически не зависят от частоты;

2) значения $|n_{rs}|$ для любой фазовой скорости значительно меньше значений $|n_{zs}|$, $|n_{\theta s}|$;

3) при $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$ (винтовая анизотропия отсутствует) $n_{\theta 1} = n_{\theta 3} = 0$, $n_{\theta 2} \neq 0$ только при условии, что на входе $V_{\theta s}|_{\zeta=0} \neq 0$, при $\alpha \neq 0$ для каждой волны $n_{\theta s} \neq 0$, что указывает на возникновение и развитие вращения крови при движении волны по стволу сосуда даже при условии $V_{\theta 2}|_{\zeta=0} = 0$. Однако степень проявления этого эффекта на конкретной волне существенно зависит от сочетания параметров.

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты расчетов для $\omega = 4\pi$ при следующих значениях параметров сосуда и крови: $a = 0,75 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, $E_3 = 4,905 \cdot 10^2$ кН/м^2 (согласно [3] измеренные значения $E_3 = 3 - 7 \cdot 10^2$ кН/м^2), $E_1 = 0,833 \cdot E_3$, $G = E_3 / 6$, $\nu_3 = 0,45$, $\nu_1 = 0,54$, $\rho_0 = 115$ кг/м^3, $\nu = 4 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $\rho = 102$ кН/м^3.

На *рис. 6* изображены графики зависимостей нормированных фазовых скоростей $c_j^0 = c_j / c_0$ ($c_0 = 4,227$ м/с) от параметра α. Кривая 1 соответствует квазипродольной моде, кривая 2 — квазикрутильной, кривая 3 — волне давления (согласно [3] измеренные значения $c_0 = 4 \div 6$ м/с). На *рис. 7* изображены зависимости коэффициентов затухания соответствующих мод.

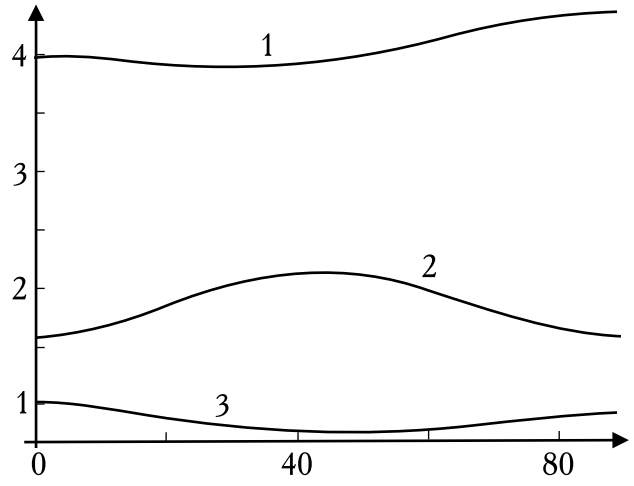


Рис. 6

На *рис. 8* кривая 1 описывает зависимость $n_{z1}(\alpha)$, кривая 2 — $n_{\theta 1}(\alpha)$.

На *рис. 9* кривая 1 описывает зависимость $n_{z2}(\alpha)$, кривая 2 — $n_{\theta 2}(\alpha)$.

На *рис. 10* кривая 1 описывает зависимость $n_{z3}(\alpha)$, кривая 2 — $n_{\theta 3}(\alpha)$. На кривой 2 отчетливо выделяются два $\max|n_{\theta 3}|$. Первый из них достигается при $\alpha \approx 16^\circ$ и равен 0,28, второй — при $\alpha \approx 78^\circ$ и равен 0,199, при этом фазы $n_{\theta 3}(\alpha_0)$ и $n_{\theta 3}(\alpha_1)$ противоположны.

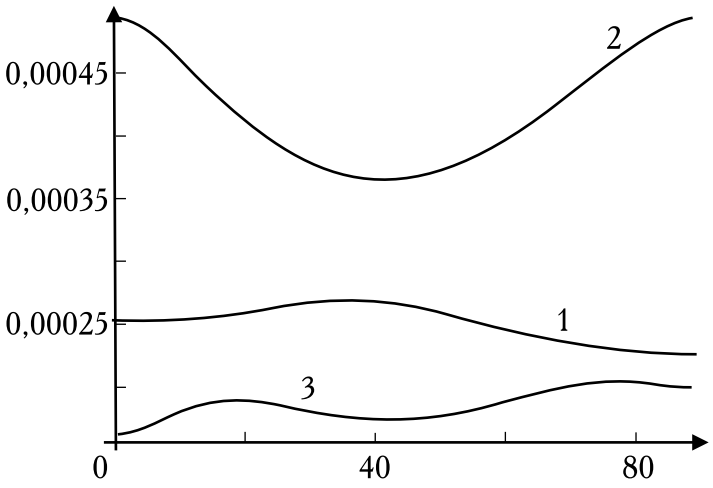


Рис. 7

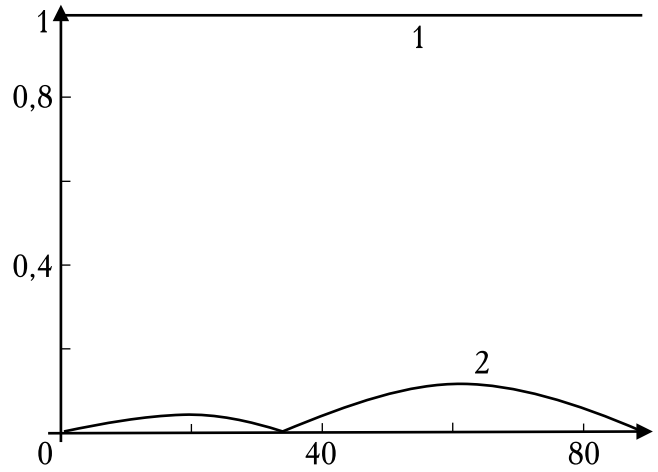


Рис. 8

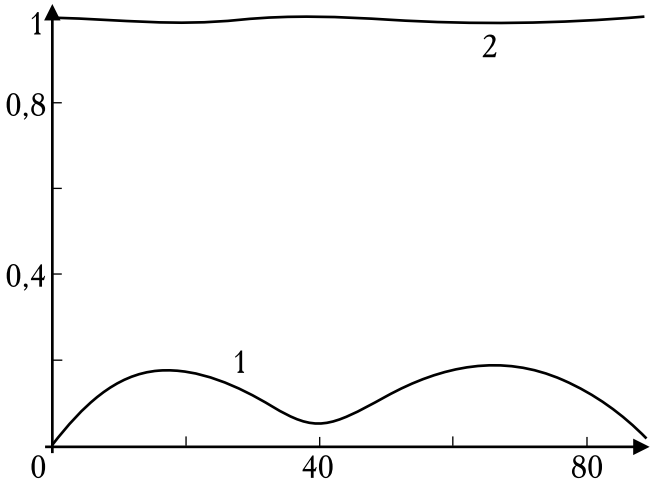


Рис. 9

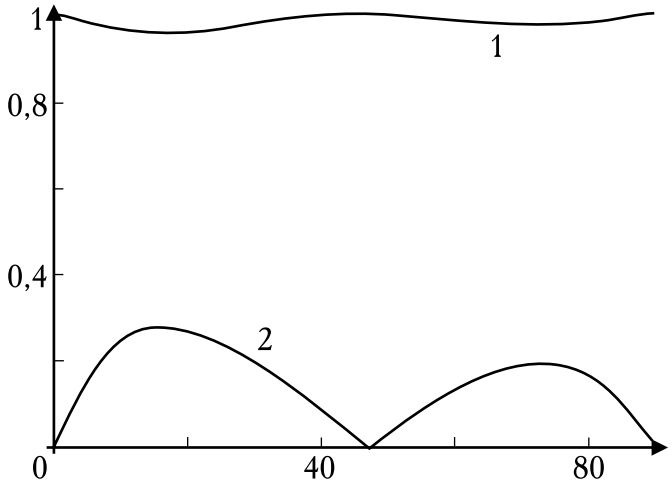


Рис. 10

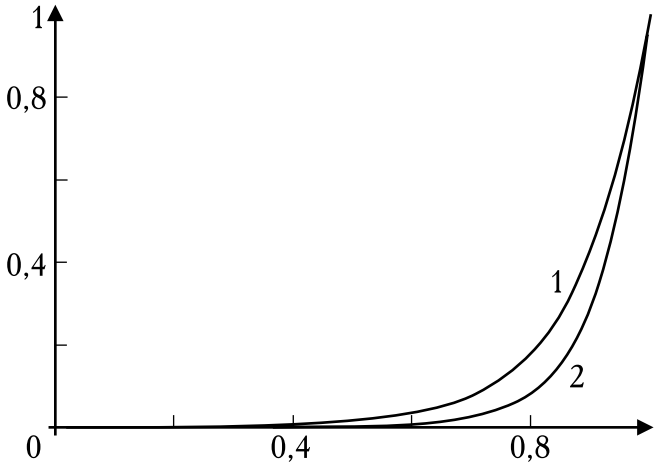


Рис. 11

Замечание 5.1. На основе (5.3) легко устанавливается, что вращательное движение крови на любой моде имеет характер пограничного слоя, локализованного у стенки сосуда. Степень его локализации определяется основной частотой. Для иллюстрации этого явления на *рис. 11* приводятся графики распределения по радиусу амплитуды нормированной скорости $v_\theta^0(\xi) = \left|V_\theta(\xi) / V_\theta(1)\right|$. Кривая 1 соответствует основной частоте $\omega = 4\pi$, кривая 2 — частоте обертона $\omega = 8\pi$. В силу малости волновых чисел эти графики для различных мод совпадают.

Из проведенного анализа вытекает, что винтовая анизотропия упругих свойств стенки сосуда может являться одной из причин винтового движения крови.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги, можно выделить следующие основные результаты настоящей работы.

1. Для цилиндрических тел с винтовой анизотропией получены основные соотношения линейной теории упругости в специальной системе координат, позволяющие применять метод однородных решений (п. 1).

2. Для кругового цилиндра с винтовой анизотропией построение решений задач Сен-Венана о растяжении, кручении, чистом изгибе и изгибе перерезывающей силой сведено к интегрированию краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (п. 2). Предложены и реализованы аналитические и численные методы интегрирования этих задач (п. 3). В случае малых значений параметра τ_0 (винтовые спирали имеют большой шаг) для смещений, напряжений и элементов матрицы жесткостей получены простые аналитические формулы. В случае произвольных значений τ_0 построение решение осуществлено численным методом, что позволило установить смену эффекта раскручивания, который имеет место при растяжении цилиндров с малыми значениями параметра τ_0, на эффект закручивания при достаточно больших значениях этого параметра.

3. Для тонкостенных полых цилиндров с винтовой анизотропией на основе гипотез Кирхгоффа~Лява получены уравнения колебаний, и в рамках безмоментной теории проведено исследование распространения гармонических волн в области низких частот. Установлено взаимодействие продольных и крутильных деформаций при динамических процессах, и на основе расчетов проиллюстрирована степень этого взаимодействия в зависимости от параметров задачи (п. 2).

4. Построена математическая модель, из которой вытекает, что винтовая анизотропия артериальных стенок сосуда, может являться одной из причин винтового пульсового движения крови.

Таким образом, винтовая анизотропия упругих тел приводит к некоторым особенностям их деформирования, которые особенно ярко проявляются при динамических процессах и может быть использована в различных устройствах. В частности стержни с винтовой анизотропией могут выполнять роль преобразователей продольных деформаций в продольно-крутильные, и наоборот.

Винтовое движение крови в артериальных сосудах может выполнять роль сепаратора, оставляя ближе к оси сосуда легкие фракции крови (известно, что с механической точки зрения, кровь является суспензией) и отчасти объяснить то, что склеротические явления наблюдаются в основном на участках, где ось сосуда имеет кривизну и в областях бифуркации сосудов. Отчасти, поскольку прилипанию частиц могут препятствовать силы другой природы, например электростатические силы. Анализ влияния таких сил на характер механического движения крови требует уже других подходов.

Список сайтов

http://vesta.ict.nsc.ru/HBC/1998/n45-46/f33/html,
http://www.bioform.ru/index_framed/files/biomer_frm/biomed_au2001.htm,
http://catalysis.nsk/su/shem/medicina/_1/1_12.html,
http://www.sbras.nsc.ru/HBC/2003/n17/f06/html.[220mm]

Литература

1. *Cristensen R.M.* Mechanics of composite matherials. N.Y., Wiley, 1979.
   Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М., Мир, 1982, 334 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М., Изд-во МГУ, 1984, 335 с.
3. *Pedley T.J.* The fluid mechanics blood vessels. Cambridge University Press, Cambridge—London—New York—Rochelle—Melbourne—Sydney, 1980.
   Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М., Мир, 1983, 400 с.
4. *Друзь А.Н., Поляков Н.А., Устинов Ю.А.* Однородные решения и задачи Сен-Венана для естественно закрученного стержня. ПММ, 1996, т. 60, вып. 4, с. 660—668.
5. *Друзь А.Н., Устинов Ю.А.* Решения Сен-Венана естетсвенно закрученнго стержня в случае малой "крутки". Изв. ВУЗов, Сев.-Кав. регион. Естеств. науки, 2002, № 3, с. 37—41.
6. *Устинов Ю.А., Курбатова Н.В.* Задачи Сен-Венана для стержней с физической и геометрической анизотропией. Изв. ВУЗов. Сев.-Кав.регион. Мат. модел. Естеств. науки, 2001, Спецвыпуск, с. 154—157.
7. *Устинов Ю.А.* Решение задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией. Докл. РАН, 2001, т. 360, № 6, с. 770—773.
8. *Устинов Ю.А.* Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией. ПММ, 2003, т. 67, вып. 1, с. 89—98.
9. *Устинов Ю.А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М., "Наука", 2003, 128 с.
10. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., "Наука", 1977, 415 с.
11. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону, Изд-во РГУ, 1993, 144 с.
12. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О потоке энергии при резонансах полуограниченных тел. Докл. АН СССР, 1990, т. 310, № 2, с. 309—312.
13. *Друзь А.Н., Устинов Ю.А.* Тензор Грина для упругого цилиндра и приложения его к развитию теории Сен-Венана. ПММ, 1996, т. 60, вып. 1, с. 102—110.
14. *Устинов Ю.А.* Задача Сен-Венана для пружины. Докл. РАН, 1995, т. 345, № 5, с. 621—623.
15. *Добров Н.Б., Кузьмина Н.Б, Роева И.Б.* Связь анатомических и гидродинамических особенностей сердца в связи с его насосной функцией. Вестник АМН СССР, 1974, № 6, с. 22—31.
16. *Пуриня Б.А., Касьянов В.А.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов. Рига, Знание, 1980, 260 с.