ОТЫСКАНИЕ СКОРОСТИ БЕГУЩИХ ВОЛН В ОБОЛОЧКЕ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

1. Постановка задачи

Рассмотри тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S — поперечное сечение цилиндра, L — его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$. S — кольцо с внутренним и внешним радиусами r_1, r_2 соответственно, h — толщина оболочки, α — угол между винтовой линией и осью x_3.

Введем декартову систему координат x_1, x_2, x_3, связав ее начало с центром сечения. Ось $x_3 = z$ направим по оси цилиндра. Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем винтовую анизотропию r, φ, z, связанную с основной соотношениями

$$\begin{cases} x_1 = rcos(\varphi + \tau z) \\ x_2 = rsin(\varphi + \tau z) \\ x_3 = z \end{cases} \tag{1.1}$$

С винтовой линией $r = const$, $\varphi = const$ свяжем естественный базис

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = \underline{n}, \\ \underline{e}_2 = \underline{b}, \\ \underline{e}_3 = \underline{t}, \end{cases}$$

где $\underline{n}$, $\underline{b}$, $\underline{t}$ — векторы главной нормали, бинормали и касательной соответственно.

Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде:

$$\underline{R} = r\underline{e}'_1 + z\underline{e}'_3 \tag{1.2}$$

Здесь

$$\begin{cases} \underline{e}'_1 = \underline{e}_r = \underline{i}_1 cos(\varphi + \tau z) + \underline{i}_2 sin(\varphi + \tau z) \\ \underline{e}'_2 = \underline{e}_r = \underline{i}_1 cos(\varphi + \tau z) + \underline{i}_2 sin(\varphi + \tau z) \\ \underline{e}'_3 = \underline{e}_z \end{cases} \tag{1.3}$$

Матрица перехода от базиса $\underline{e}_j$ к базису $\underline{e}'_j$ выглядит следующим образом:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{g_0} & -\dfrac{x}{g_0} \\ 0 & \dfrac{x}{g_0} & \dfrac{1}{g_0} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

$$g_0^2 = 1 + x^2,\ x = \tau r = tg\alpha$$

Будем считать материал цилиндра локально ортотропным, у которого главное направление тензора упругих свойств совпадает с направлением ортов естественного базиса. Будем использовать следующую форму закона Гука:

$$\sigma_i = c_{ij}\varepsilon_j \tag{1.5}$$

$$\varepsilon_i = s_{ij}\sigma_j \tag{1.6}$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$, $\varepsilon_4 = \varepsilon_{23}$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_{13}$, $\varepsilon_6 = \varepsilon_{12}$,
$\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{13}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$,

Упругие свойства определим с помощью технических постоянных. Податливости выражаются через них следующим образом:

$$\begin{array}{lll} s_{11} = \dfrac{1}{E_1}; & s_{12} = -\dfrac{\nu_{12}}{E_1}; & s_{13} = -\dfrac{\nu_{13}}{E_1}; \\ s_{22} = \dfrac{1}{E_2}; & s_{23} = -\dfrac{\nu_{23}}{E_2}; & s_{33} = \dfrac{1}{E_3}; \\ s_{44} = \dfrac{1}{G_{23}}; & s_{55} = \dfrac{1}{G_{13}}; & s_{66} = \dfrac{1}{G_{12}}; \end{array} \tag{1.7}$$

Примем следующие значения констант: внутренний радиус сосуда $a = 0.75 * 10^{-2}$ м., $h = 0.6 * 10^{-3}$ м., $E_3 = 4.905 * 10^2$ кН/м^2, $E_1 = 0.833E_3$, $G = E_3/6$, $\nu_{32} = 0.45$, $\nu_{23} = 0.54$, $\rho = 115$кг/м^3, $G_{ij} = E_3/6$. Также константы связаны соотношениями:

$$\nu_{12}E_2 = \nu_{21}E_1,\ \nu_{13}E_3 = \nu_{31}E_1,\ \nu_{23}E_3 = \nu_{32}E_2$$

После перехода к базису $\underline{e}'_j$ получаем определяющие соотношения в следующем виде:

$$\begin{array}{l} \sigma_{rr} = g_{11}\varepsilon_{rr} + g_{21}\varepsilon_{\varphi\varphi} + g_{31}\varepsilon_{zz} + g_{41}\varepsilon_{\varphi z} \\ \sigma_{\varphi\varphi} = g_{12}\varepsilon_{rr} + g_{22}\varepsilon_{\varphi\varphi} + g_{32}\varepsilon_{zz} + g_{42}\varepsilon_{\varphi z} \\ \sigma_{zz} = g_{13}\varepsilon_{rr} + g_{23}\varepsilon_{\varphi\varphi} + g_{33}\varepsilon_{zz} + g_{43}\varepsilon_{\varphi z} \\ \sigma_{\varphi z} = g_{14}\varepsilon_{rr} + g_{24}\varepsilon_{\varphi\varphi} + g_{34}\varepsilon_{zz} + g_{44}\varepsilon_{\varphi z} \\ \sigma_{rz} = 2g_{55}\varepsilon_{rz} + 2g_{56}\varepsilon_{r\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} = 2g_{56}\varepsilon_{rz} + 2g_{66}\varepsilon_{r\varphi}, \end{array} \tag{1.8}$$

где коэффициенты задаются следующими выражениями:

$$g_{11} = c_{11},\ g_{12} = \frac{c_{12} + x^2c_{13}}{g_0^2},\ g_{13} = \frac{c_{13} + c_{12}x^2}{g_0^2},\ g_{14} = -x\frac{c_{12} - c_{13}}{g_0^2}$$

$$g_{22} = \frac{c_{22} + 2x^2c_{23} + x^2c_{44} + 4x^4c_{33}}{g_0^2},\ g_{23} = \frac{x^2(c_{22} + c_{33} - 4c_{44}) + (1 + x^4)c_{23}}{g_0^4}$$

$$g_{24} = x\frac{c_{23} - c_{22} + 2c_{44} + x^2(c_{33} - c_{23} - 2c_{44})}{g_0^4},\ g_{33} = \frac{c_{33} + x^2(c_{22} + 4c_{44}) + c_{22}x^4}{g_0^4}$$

$$g_{34} = x\frac{c_{33} - c_{23} - 2c_{44} + x^2(c_{23} - c_{22} + 2c_{44})}{g_0^4},\ g_{44} = \frac{c_{44} + x^2(c_{22} - 2c_{44} - 2c_{23}) + c_{44}x^4}{g_0^4}$$

$$g_{55} = \frac{c_{55} + c_{66}x^2}{g_0^2},\ g_{56} = x\frac{c_{55} - c_{66}}{g_0^2},\ g_{55} = \frac{c_{66} + c_{55}x^2}{g_0^2}$$

2. Уравнение равновесия оболочки.

Компоненты тензора деформаций записываются следующим образом:

$$\varepsilon^0_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a}\left(u_r - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right);\ \varepsilon^0_{zz} = Du_z;\ \varepsilon^0_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + Du_\varphi\right)$$

$$\varepsilon^1_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}\right);\ \varepsilon^1_{zz} = -D^2u_z;\ \varepsilon^1_{\varphi z} = \frac{1}{2a}\left(Du_\varphi - 2\frac{\partial^2 u_r}{\partial\varphi\partial r}\right),$$

где a — радиус оболочки, $D = \dfrac{\partial}{\partial z} - \tau\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

Уравнения равновесия с учетом гипотез Кирхгоффа-Лява при отсутствии внешних нагрузок следующие:

$$\begin{cases} DT_2 + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T_3}{\partial\varphi} = h\rho\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T_1}{\partial\varphi} + DT_3 + \dfrac{1}{a}Q_1 = h\rho\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial Q_1}{\partial\varphi} + DQ_2 - \dfrac{T_1}{a} = h\rho\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$T_i = hg_{ij}\varepsilon^0_j \tag{2.2}$$

$$M_i = \frac{h^3 g_{ij}}{12}\varepsilon^1_j \tag{2.3}$$

$i, j = 1..3$
$T_1 = T_{\varphi\varphi}$, $T_2 = T_{zz}$, $T_3 = T_{z\varphi}$
$M_1 = M_{\varphi\varphi}$, $M_2 = M_{zz}$, $M_3 = M_{z\varphi}$

$$Q_1 = DM_1 + \frac{1}{a}\frac{\partial M_3}{\partial\varphi};\ Q_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial M_2}{\partial\varphi} + DM_3$$

Рассмотрим задачу о распространении продольной волны. Будем считать задачу осесимметричной, оболочку — мягкой. Решение будем искать в виде бегущих волн:

$$\begin{cases} u_\varphi = u_\varphi e^{i(kz-\omega t)} \\ u_z = u_z e^{i(kz-\omega t)} \\ u_r = u_r e^{i(kz-\omega t)} \end{cases} \tag{2.4}$$

Деформации принимают вид:

$$\varepsilon^0_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{a};\ \varepsilon^0_{zz} = iku_z;\ \varepsilon^0_{\varphi z} = \frac{iku_\varphi}{2}$$

Уравнение равновесия, если пренебречь моментными слагаемыми и считать задачу осесимметричной, упрощается следующим образом:

$$\begin{cases} ikT_2 = -h\rho\omega^2 u_z \\ ikT_3 = -h\rho\omega^2 u_\varphi \\ -\dfrac{T_1}{a} = -h\rho\omega^2 u_r, \end{cases} \tag{2.5}$$

Выражения для усилий следующие:

$$T_i = g_{2,i+1}\frac{u_r}{a} + ikg_{3,i+1}u_z + ikg_{4,i+1}\frac{u_\varphi}{2}$$

Уравнения равновесия с учетом гипотез Рейсснера при отсутствии внешних нагрузок следующие:

$$\text{(2.6)} \qquad \begin{cases} DT_2 + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T_3}{\partial \varphi} = h\rho\dfrac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial T_1}{\partial \varphi} + DT_3 + \dfrac{1}{a}Q_1 = h\rho\dfrac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\ \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial Q_1}{\partial \varphi} + DQ_2 - \dfrac{T_1}{a} = h\rho\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ DM_2 + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial M_3}{\partial \varphi} - Q_2 - \dfrac{h^3}{12}\rho\dfrac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} = 0, \\ \dfrac{1}{a}DM_1 + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial M_3}{\partial \varphi} - Q_1 - \dfrac{h^3}{12}\rho\dfrac{\partial^2 \theta_\varphi}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^0_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a}\left(u_r - \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right);\ \varepsilon^0_{zz} = Du_z;\ \varepsilon^0_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + Du_\varphi\right)$$

$$\varepsilon^0_{rz} = \frac{1}{2}\left(\theta_z + Du_r\right);\ \varepsilon^0_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left[\theta_\varphi + \frac{1}{a}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi\right)\right]$$

$$\varepsilon^1_{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2}\right);\ \varepsilon^1_{zz} = -D^2u_z;\ \varepsilon^1_{\varphi z} = \frac{1}{2a}\left(Du_\varphi - 2\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi \partial r}\right),$$

$$\varepsilon^1_{rz} = 0;\ \varepsilon^1_{r\varphi} = -\frac{1}{2a}\theta_\varphi$$

$$Q_2 = hg_{4j}\varepsilon^0_j;\ Q_1 = hg_{5j}\varepsilon^0_j$$