1. Перемещение стержня удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\sigma\right) = \rho A\ddot{u} \tag{1}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho A\ddot{u} \tag{2}$$

Уравнение (2) вместе с краевыми условиями образует классическую постановку задачи. Предположим, что краевые условия имеют вид:

левый конец стержня жестко защемлен:

$$u|_{x=0} = 0 \tag{3}$$

на правом конце стержня задана нагрузка:

$$\sigma|_{x=L} = p(t) \tag{4}$$

Обобщённая постановка задачи о продольных колебаниях стержня имеет вид:

$$\int\limits_0^L EA\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx = Apv(L) + \int\limits_0^L \rho A\ddot{u}vdx \tag{5}$$

Обобщённым решением называется функция, которая удовлетворяет равенству (5) для произвольной функции v, удовлетворяющей условию (3).

Разобьем отрезок $[0, L]$ на N отрезков одинаковой длины. Координаты концов отрезков — x_{2i}, $x_{2i} = ih$, $h = L/N$. Каждый из отрезков $[x_{2(i-1)}, x_{2i}]$ можно взаимно однозначно отобразить на отрезок $[-1; 1]$ при помощи соотношения

$$x = \frac{h}{2}\xi + \frac{x_{2i} + x_{2(i-1)}}{2}$$

На каждом из отрезков приближенно представим неизвестную функцию u в виде линейной функции:

$$u \approx U_{2(i-1)}N_1(\xi) + U_{2i-1}N_2(\xi) + U_{2i}N_3(\xi), \tag{6}$$

где

$$N_1(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2};\ N_2(\xi) = \frac{1-\xi^2}{2};\ N_3(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2}$$

Пользуясь выражением (6) построить локальную матрицу жёсткости

2. Считая E, A и ρ постоянными, построить глобальную матрицу жёсткости.

3. Построить локальную и глобальную матрицы масс (A, ρ — постоянные)

4. Обобщенная постановка задачи для упругого тела в случае антиплоской деформации имеет вид:

$$\int\limits_S \mu \nabla u \cdot \nabla v dS = \int\limits_S \left[f - \rho \ddot{u} \right] v dS + \int\limits_{\partial S} p v dl, \tag{7}$$

u — перемещение, v — пробная функция, p — нагрузка на границе, S — рассматриваемая область.

Рассмотрим прямоугольник

$$\left\{ (\xi_1, \xi_2) | -1 \le \xi_1 \le 1,\ -1 \le \xi_2 \le 1 \right\}.$$

Он может быть отображён на четырёхугольник произвольной формы с вершинами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $i = \overline{1,4}$ при помощи соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(1)} N_1(\xi) + x_1^{(2)} N_2(\xi) + x_1^{(3)} N_3(\xi) + x_1^{(4)} N_4(\xi), \\ x_2 &= x_2^{(1)} N_1(\xi) + x_2^{(2)} N_2(\xi) + x_2^{(3)} N_3(\xi) + x_2^{(4)} N_4(\xi), \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$N_1 = \frac{1}{4}(-\xi_1 + 1)(-\xi_2 + 1),$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(-\xi_2 + 1),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1),$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(-\xi_1 + 1)(\xi_2 + 1),$$

— базисные функции прямоугольного билинейного элемента.

Аппроксимация неизвестной функции имеет вид:

$$u = u_1 N_1(\xi) + u_2 N_2(\xi) + u_3 N_3(\xi) + u_4 N_4(\xi), \tag{9}$$

Найти матрицу жёсткости для прямоугольного элемента с координатами вершин (h_x, h_y), $(-h_x, h_y)$, $(-h_x, -h_y)$, $(h_x, -h_y)$.

5. Построить матрицу масс для задачи (7) для прямоугольного элемента с координатами вершин (h_x, h_y), $(-h_x, h_y)$, $(-h_x, -h_y)$, $(h_x, -h_y)$, используя прямоугольный билинейный элемент.

6. Найти матрицу жёсткости для серендипова прямоугольного элемента с координатами вершин (h_x, h_y), $(-h_x, h_y)$, $(-h_x, -h_y)$, $(h_x, -h_y)$ с базисными функциями

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)(-\xi_1-\xi_2-1),$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1-\xi_2),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)(\xi_1-\xi_2-1),$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2^2),$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)(\xi_1+\xi_2-1),$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(1+\xi_2),$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)(-\xi_1+\xi_2-1),$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2^2).$$

Считаем, что вторая, четвёртая, шестая и восьмая точки находятся на серединах сторон прямоугольника.

7. Найти матрицу жёсткости для серендипова прямоугольного элемента с координатами вершин (h_x, h_y), $(-h_x, h_y)$, $(-h_x, -h_y)$, $(h_x, -h_y)$ с базисными функциями из предыдущего варианта.