1 Свойства целых чисел

Определения (общий делитель):

- Для $a, b \in \mathbb{Z}$ будем называть $d \in \mathbb{Z}$ *общим делителем* a и b, если $d \mid a$ и $d \mid b$.
- Более того, будем называть это d *наибольшим общим делителем* a и b, если $d \geqslant 0$, и все остальные общие делители a и b делят d. $\triangle$

Теорема 1 (см. V. Shoup). *$\forall a, b \in \mathbb{Z}$ существует единственный наибольший общий делитель d чисел a и b, и более того, $a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z} = d\,\mathbb{Z}$.* $\Diamond$

Теорема 2. *Пусть числа $a, b, r \in \mathbb{Z}$ и пусть $d = \gcd(a, b)$. Следовательно, $\exists s, t \in \mathbb{Z}$, такие, что $a\,s + b\,t = r$ тогда и только тогда, когда $d \mid r$. В частности, a и b являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда найдутся целые s и t, такие, что $a\,s + b\,t = 1$.* $\Diamond$

Доказательство.

$$\begin{array}{ll} & a\,s + b\,t = r \quad \text{при } \exists s, t \in \mathbb{Z} \\ \iff & r \in a\,\mathbb{Z} + b\,\mathbb{Z} \\ \iff & r \in d\,\mathbb{Z} \quad \text{(по теореме 1)} \\ \iff & d \mid r. \end{array}$$

Это доказывает первое утверждение. Второе следует из первого при $r = 1$.$\square$

Теорема 3. *Пусть числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$ — такие, что $c \mid a\,b$ и $\gcd(a, c) = 1$. Следовательно, $c \mid b$.* $\Diamond$

Доказательство. Предположим, что $c \mid a\,b$ и $\gcd(a, c) = 1$. Следовательно, поскольку $\gcd(a, c) = 1$, по теореме 2, $a\,s + c\,t = 1$ для некоторых $s, t \in \mathbb{Z}$. Умножая обе части этого равенства на b, получаем:

$$a\,b\,s + c\,b\,t = b. \tag{1}$$

Поскольку, по предположению, c делит $a\,b$ и поскольку, очевидно, c делит $c\,b\,t$, из этого следует, что c делит левую часть уравнения (1), и следовательно, c делит b. $\square$

Замечание: Пусть p является простым числом и $a \in \mathbb{Z}$. Так как единственными делителями числа p являются ± 1 и $\pm p$, следовательно,

$$\begin{array}{lll} p \mid a & \implies & \gcd(a, p) = p, \quad \text{и} \\ p \nmid a & \implies & \gcd(a, p) = 1. \end{array}$$ $*$

Из этого замечания и теоремы 3 вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть p — простое число, $a, b \in \mathbb{Z}$. Тогда утверждение «$p \mid a\,b$» влечёт за собой «$p \mid a$ или $p \mid b$».* $\Diamond$

Доказательство. Предположим, что $p \mid a\,b$. Если $p \mid a$, то теорема доказана. Поэтому, предположим, что $p \nmid a$. Из приведённого выше замечания следует, что $\gcd(a) = 1$, и по теореме 3, $p \mid b$. $\square$

Следствие. Если $a_1, a_2, \ldots a_k \in \mathbb{Z}$, и p — простое, такое, что $p \mid a_1\,a_2\,\ldots\,a_k$, то $\exists i \in [1, k]_{\mathbb{N}}$, для которого $p \mid a_i$. $*$

2 Приближённые вычисления

Пример (использование ряда Тейлора):

```
{
  Вычисление e в степени X при помощи ряда Тейлора
}
const
  Eps = 1e-7;
var
  X, A, S: Real;
  K: Integer;
begin
  Write('Введите значение аргумента: ');
  Read(X);
  S := 0;
  A := 1;
  K := 1;
  repeat
    S := S + A;
    A := A * X / K;
    K := K + 1
  until Abs(A) < Eps;
  WriteLn('e в степени ', X, ' равно ', S)
end.
```

*

3 Величины

См. таблицу 1.

Таблица 1: Размер одного йобибита (1 Yibit) в различных единицах измерения

Единица	Количество
bit	1 208 925 819 614 629 174 706 176
Kibit	1 180 591 620 717 411 303 424
Mibit	1 152 921 504 606 846 976
Gibit	1 125 899 906 842 624
Tibit	1 099 511 627 776
Pibit	1 073 741 824
Eibit	1 048 576
Zibit	1024
Yibit	1

См. таблицы 2 и 3.

Таблица 2: Основные характеристики планет Солнечной системы (часть 1)

Величина	**Год (земных дней)**	**День (земных дней)**	**Диаметр (км)**	**Диаметр (× Земли)**
Меркурий	88	58	4878	0,383
Венера	224	242	12 102	0,9
Земля	365	1	12 760	1
Марс	687	1,029	6746	0,533
Юпитер	4332	0,415	142 984	11,2
Сатурн	9617	0,72	120 536	9,45
Уран	30 685	0,75	51 118	4,8
Нептун	60 155	0,67	49 532	3,88

Таблица 3: Основные характеристики планет Солнечной системы (часть 2)

Величина	**Масса (кг)**	**Масса (× Земли)**	**Расстояние до Солнца (км)**
Меркурий	$3{,}301\,04 \times 10^{23}$	0,055	57 909 227
Венера	$4{,}867\,32 \times 10^{24}$	0,81	108 209 475
Земля	$5{,}972\,19 \times 10^{24}$	1	149 598 262
Марс	$6{,}416\,93 \times 10^{23}$	0,107	227 943 824
Юпитер	$1{,}898\,13 \times 10^{27}$	317,83	778 340 821
Сатурн	$5{,}683\,19 \times 10^{26}$	95,1	1 426 666 422
Уран	$8{,}681\,03 \times 10^{25}$	14,5	2 870 658 186
Нептун	$1{,}024\,10 \times 10^{26}$	17,1	4 498 396 441

4 Ссылки

- http://www.shoup.net/
- Теорема 3 на с. 1