Модуль 2 «Математический анализ, линейная алгебра и векторный анализ в Maple»

Задания для повторения и индивидуальной работы (30 вариантов)

Исходные функции, интегралы, системы уравнений и матрицы выбираются из **Приложений 1 и 2** строго в соответствии с вашим индивидуальным номером варианта ($N = 1 \dots 30$). Все вычисления должны сопровождаться необходимыми командами Maple и краткими текстовыми выводами.

Задание 1. Исследование функции. Провести полное исследование заданной функции $f(x)$ (Приложение 1) по следующей схеме с использованием команд `iscont`, `discont`, `singular`, `limit`, `diff`, `extrema`, `minimize`, `maximize`:

1. **Область определения и симметрия:** найти $D(f)$, проверить функцию на четность/нечетность и периодичность (решив `solve({f(x)=f(x+T), T>0}, T)`).
2. **Непрерывность, разрывы и гладкость:** найти точки разрыва, сингулярности и отсутствия гладкости; вычислить односторонние пределы и односторонние производные в особых точках, указав характер разрыва или излома.
3. **Асимптоты:** найти уравнения вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот (если они существуют).
4. **Локальные экстремумы:** найти точки локальных экстремумов и значения функции в них, указать их характер.
5. **Графики функции:** а) общий вид графика с отображением асимптот (пунктиром) и подписями экстремумов в виде `loc max (xmax, ymax)` и `loc min (xmin, ymin)` через команды `textplot` и `typeset`; б) укрупненный фрагмент в районе локальных экстремумов и особых точек.

Задание 2. Ряды Тейлора (Маклорена). Найти частичные суммы ряда Маклорена заданной функции $f(x)$ (Приложение 1) для $n = 3..11$. Построить в одних осях графики самой функции и ее приближений двумя способами: 1) с помощью команд `taylor` и `plot`; 2) с помощью `TaylorApproximation` пакета `Student[Calculus1]`. Для частичной суммы при $n = 11$ визуально определить интервал изменения независимой переменной, на котором разложение наилучшим образом аппроксимирует заданную функцию.

Задание 3. Определенный интеграл и суммы Римана. Вычислить заданный определенный интеграл (Приложение 1). С помощью команды `RiemannSum` пакета `Student[Calculus1]` посчитать значения левой, правой и средней римановых сумм и изобразить их графически. Выяснить, при каком минимальном количестве аппроксимирующих прямоугольников значение определенного интеграла и его средней римановой суммы совпадают с точностью до 10^{-4}.

Задание 4. Геометрические приложения определенного интеграла. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями (Приложение 1). Построить графики указанных функций в одних осях, определить точки их пересечения и вычислить площадь с помощью определенного интеграла.

Задание 5. Кратные интегралы. Вычислить двойной интеграл $\iint_D z(x, y)\, dx\, dy$ по области D, ограниченной заданными линиями (Приложение 2). Проиллюстрировать геометрический смысл двойного интеграла: изобразить область интегрирования на плоскости (`implicitplot`) и поверхность $z(x, y)$, ограничивающую цилиндрическое тело. Вычислить интеграл с помощью команды `MultiInt` пакета `Student[MultivariateCalculus]` и сведением к повторному интегралу. Сравнить результаты.

Задание 6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Записать и решить заданную СЛАУ (Приложение 2) с помощью команды `solve`. Перевести систему в матричный вид командой `GenerateMatrix` пакета `LinearAlgebra`, выделив матрицу системы A и вектор правой части b. Решить матричное уравнение вида $Ax = b$ (командой `LinearSolve` или с помощью обратной матрицы).

Задание 7. Спектральный анализ матрицы. Провести спектральный анализ матрицы A из Задания 6. Найти собственные числа, их кратность и соответствующие собственные векторы (`Eigenvectors`). Проверить найденные значения по определению, подставив их в уравнение $Ax = \lambda x$. С помощью команд Maple найти характеристический многочлен (`CharacteristicPolynomial`), его корни и Жорданову нормальную форму (`JordanForm`). Сравнить все результаты.

Задание 8. Программное формирование матрицы и её анализ (пакет `LinearAlgebra`). Подключите пакет `LinearAlgebra` и задайте переменную `N`, равную номеру вашего индивидуального варианта ($N = 1 \dots 30$).

1. **Программное построение матрицы:** сформируйте квадратную матрицу B размера 4×4 без ручного ввода элементов, используя конструктор `Matrix(4, 4, (i, j) -> ...)` и кусочную функцию `piecewise`, если её элементы b_{ij} задаются правилом:

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^N (N + 2i), & \text{если } i = j, \\ 1, & \text{если } |i - j| = 1, \\ 0, & \text{если } |i - j| > 1. \end{cases}$$

   Выведите полученную матрицу на экран.

2. **Базовые матричные характеристики:** вычислите определитель (`Determinant`), обратную матрицу (`MatrixInverse`) и ранг (`Rank`) матрицы B.

3. **Матричные нормы:** вычислите три нормы матрицы (`Norm`): максимальную строчную (бесконечную), максимальную столбцовую (1-норму) и спектральную (2-норму).

4. **Структурные свойства и знакоопределённость:** исследуйте матрицу B на симметричность (сравнение с `Transpose(B)`), ортогональность (`IsOrthogonal`) и положительную/отрицательную определённость (`IsDefinite` с параметрами `'positive_definite'` и `'negative_definite'`). Сделайте письменные выводы по каждому свойству.

Задание 9. Векторный анализ. Найти градиент заданного скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ (Приложение 2) и вычислить производную по направлению вектора $\vec{l} = (2, -1, 2)$ в точке $M(1, -1, 2)$. Найти дивергенцию и ротор градиента (`div grad` φ и `rot grad` φ) с помощью пакета `VectorCalculus`.

Приложение 1. Исходные данные к Заданиям 1–4 (Варианты 1–30)

№	Задание 1. Функция $f(x)$ для полного исследования	Задание 2. Функция для ряда Маклорена ($n = 3..11$)	Задание 3. Определенный интеграл	Задание 4. Границы плоской фигуры
1	$f(x) = \dfrac{x^2 + \lvert x\rvert + 1}{x}$	$f(x) = x^2 \arctan(x)$	$\int_0^3 (\sqrt{x+1} + \cos x)\,dx$	$y = 4x - x^2,\ y = x$
2	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert^3}{x^2 - 1}$	$f(x) = x^3 \ln(1 + x)$	$\int_1^4 (\sqrt{x} + \sin x)\,dx$	$y = 5x - x^2,\ y = 2x$
3	$f(x) = \dfrac{x^2 - 2\lvert x\rvert + 2}{x - 1}$	$f(x) = x^2 \arcsin(x)$	$\int_0^2 (e^{-x} + \sqrt{x+2})\,dx$	$y = 6 - x^2,\ y = x$
4	$f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{x}$	$f(x) = x \cos(2x)$	$\int_1^3 (\ln(x+1) + x^2)\,dx$	$y = x^2 - 2x,\ y = x$
5	$f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{\lvert x\rvert - 1}$	$f(x) = x^2 e^{-2x}$	$\int_0^2 (\sqrt{2x+1} + \sin x)\,dx$	$y = 3x - x^2,\ y = -x$
6	$f(x) = 2\lvert x\rvert + 2/x$	$f(x) = x^3 \operatorname{arccot}(x)$	$\int_1^4 (1/\sqrt{x} + \cos x)\,dx$	$y = 4 - x^2,\ y = 2 - x$
7	$f(x) = (x^3 - 3\lvert x\rvert)/(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 \sin(3x)$	$\int_0^3 (\sqrt{x+2} - \sin x)\,dx$	$y = x^2 - 4x + 3,\ y = x - 1$
8	$f(x) = \lvert x - 1\rvert/(x^2 - 4)$	$f(x) = x \ln(1 + 2x)$	$\int_1^3 (e^{x/2} + \sqrt{x})\,dx$	$y = 5 - x^2,\ y = 1$
9	$f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 2/x$	$f(x) = x^2 \operatorname{arctanh}(x)$	$\int_0^2 (\cos(2x) + \sqrt{x+4})\,dx$	$y = 2x - x^2,\ y = x - 2$
10	$f(x) = (x^2 + 2\lvert x\rvert - 3)/(x + 2)$	$f(x) = x^3 e^{-x}$	$\int_1^4 (\sqrt{3x+1} + \cos x)\,dx$	$y = x^2 - 3x,\ y = x - 3$
11	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}, & x < 1 \\ 3x - x^2, & x \geq 1 \end{cases}$	$f(x) = x^2 \cos(3x)$	$\int_0^3 (\sqrt{x+4} + \sin(2x))\,dx$	$y = 6x - x^2,\ y = 2x$
12	$f(x) = \dfrac{\lvert x\rvert(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)}$	$f(x) = x^3 \sin(2x)$	$\int_1^3 (\sqrt{2x+3} - \cos x)\,dx$	$y = 8 - x^2,\ y = 2x$
13	$f(x) = (2\lvert x\rvert + 1)/(x - 1)$	$f(x) = x \arctan(2x)$	$\int_0^2 (e^x + \sqrt{x+1})\,dx$	$y = x^2 - 4x,\ y = -x$
14	$f(x) = (x^3 + \lvert x\rvert)/(x^2 - 4)$	$f(x) = x^2 \ln(2 + x)$	$\int_1^4 (\ln(2x) + \sqrt{x})\,dx$	$y = 3 - x^2,\ y = 2x$
15	$f(x) = \lvert x - 2\rvert + 4/x$	$f(x) = x^3 \cos(x)$	$\int_0^3 (\sqrt{3x+4} + \cos x)\,dx$	$y = 5x - x^2,\ y = x + 3$
16	$f(x) = (x^2 - 3\lvert x\rvert + 4)/x$	$f(x) = x^2 \sinh(2x)$	$\int_1^3 (2/\sqrt{x} + \sin x)\,dx$	$y = 9 - x^2,\ y = 5$
17	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+1}, & x \leq 0 \\ x^2 - 4x - 4, & x > 0 \end{cases}$	$f(x) = x \arcsin(x/2)$	$\int_0^2 (\sqrt{x+3} + \cos(2x))\,dx$	$y = x^2 - 5x + 4,\ y = x - 1$
18	$f(x) = (\lvert x\rvert^3 + 8)/x^2$	$f(x) = x^2 \cosh(x)$	$\int_1^4 (e^{-x/2} + \sqrt{x+2})\,dx$	$y = 4x - x^2,\ y = 3$
19	$f(x) = (x^2 + \lvert x - 1\rvert)/x$	$f(x) = x^3 \arctan(x)$	$\int_0^3 (\sqrt{2x+2} - \cos x)\,dx$	$y = 7 - x^2,\ y = 3 - 3x$
20	$f(x) = 4\sqrt[3]{x^2} - 4/x^2$	$f(x) = x^2 e^{3x}$	$\int_1^3 (\ln(x+2) + \sqrt{x})\,dx$	$y = x^2 - 2x - 3,\ y = x + 1$
21	$f(x) = (2x^2 - \lvert x\rvert)/(x - 2)$	$f(x) = x \sin(4x)$	$\int_0^2 (\sqrt{4x+1} + \sin x)\,dx$	$y = 6 - x^2,\ y = 2$
22	$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+2}, & x < 0 \\ 2 - \lvert x - 2\rvert, & x \geq 0 \end{cases}$	$f(x) = x^2 \ln(1 + 3x)$	$\int_1^4 (\sqrt{x+5} + \sin(2x))\,dx$	$y = 3x - x^2,\ y = x - 3$
23	$f(x) = (x^3 - 4\lvert x\rvert)/(x^2 - 1)$	$f(x) = x^3 e^{-2x}$	$\int_0^3 (e^{-x/3} + \sqrt{x+1})\,dx$	$y = x^2 - 6x + 5,\ y = x - 5$
24	$f(x) = \lvert x + 1\rvert + 1/(x - 1)$	$f(x) = x^2 \operatorname{arccot}(2x)$	$\int_1^3 (3/\sqrt{x+1} + \cos x)\,dx$	$y = 8 - x^2,\ y = 4$
25	$f(x) = (3\lvert x\rvert - x^2)/(x + 1)$	$f(x) = x \cosh(2x)$	$\int_0^2 (\sqrt{x+5} - \sin(2x))\,dx$	$y = 5x - x^2,\ y = 4$
26	$f(x) = (\lvert x\rvert^3 - 1)/(x^2 - 4)$	$f(x) = x^2 \arcsin(x/3)$	$\int_1^4 (\sqrt{2x+1} + \sin x)\,dx$	$y = x^2 - 3x + 2,\ y = 2x - 2$
27	$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ \frac{3x^2}{x-1}, & x > 1 \end{cases}$	$f(x) = x^3 \sinh(x)$	$\int_0^3 (\ln(x+1) + \sqrt{x+4})\,dx$	$y = 10 - x^2,\ y = 3x$
28	$f(x) = (x^2 + 3\lvert x\rvert + 2)/(x - 1)$	$f(x) = x^2 \cos(4x)$	$\int_1^3 (e^{x/3} + \sqrt{2x})\,dx$	$y = 4x - x^2,\ y = 2x - 3$
29	$f(x) = 3\lvert x\rvert + 3/(x - 1)$	$f(x) = x \operatorname{arctanh}(x/2)$	$\int_0^2 (\sqrt{3x+1} + \cos x)\,dx$	$y = x^2 - 4,\ y = 3x$
30	$f(x) = 2\lvert x\rvert^3/(x^2 + 1)$	$f(x) = x^2 \sin(5x)$	$\int_1^4 (\sqrt{x+3} - \cos(2x))\,dx$	$y = 6x - x^2,\ y = x + 4$

Приложение 2. Исходные данные к Заданиям 5–7 и 9 (Варианты 1–30)

№	Задание 5. Функция $z(x,y)$ и область D	Задания 6 и 7. Система линейных уравнений	Задание 9. Поле $\varphi(x,y,z)$
1	$z = y - x^2,\ x = 0, 1,\ y = x,\ y = 2 - x$	$2x + y + 3z = 9,\ x + 3y + 2z = 11,\ 3x + 2y + z = 10$	$\varphi = x^2y - yz^2 + 3x$
2	$z = x + y^2,\ x = 0, 1,\ y = x^2,\ y = 2 - x^2$	$3x + y + z = 8,\ x + 4y + 2z = 15,\ 2x + y + 3z = 13$	$\varphi = xy^2 + z^3 - 2y$
3	$z = x^2 + y^2,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 2 - x$	$4x - y + z = 5,\ x + 3y - z = 4,\ 2x + y + 4z = 16$	$\varphi = x^3 - 3xyz + y^2$
4	$z = 2x - y,\ x = 0, 2,\ y = x/2,\ y = 2$	$x + 2y - z = 2,\ 2x - y + 3z = 9,\ 3x + y + 2z = 11$	$\varphi = 2x^2z - y^3 + 4z$
5	$z = xy + 1,\ x = 0, 1,\ y = x^2,\ y = \sqrt{x}$	$5x + 2y + z = 12,\ x + 4y - z = 6,\ 2x - y + 3z = 9$	$\varphi = x^2 + y^2z^2 - 3x$
6	$z = x^2 - y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 1 - x^2$	$2x + 3y + z = 11,\ 3x + y + 2z = 11,\ x + 2y + 3z = 14$	$\varphi = y^2z + x^3 - 2z$
7	$z = 3 - x - y,\ x = 0, 1,\ y = x,\ y = 1$	$3x - 2y + z = 2,\ x + 3y + 2z = 13,\ 2x + y - 3z = -5$	$\varphi = xyz + x^2 - y^2$
8	$z = y^2 - x,\ x = 0, 1,\ y = x^3,\ y = x$	$4x + y - 2z = 0,\ x + 5y + z = 14,\ 2x - y + 4z = 12$	$\varphi = z^2x - 2xy + 3y$
9	$z = x + 2y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 1 - x$	$x + y + 4z = 15,\ 3x + 2y - z = 4,\ 2x + 4y + z = 13$	$\varphi = x^2y^2 - z^2 + x$
10	$z = 4 - x^2 - y^2,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = x$	$2x - y + 3z = 9,\ 4x + 2y - z = 5,\ x + 3y + 2z = 13$	$\varphi = 3x^2z - y^2 + 2z$
11	$z = 2y - x^2,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = x + 1$	$3x + 2y + z = 10,\ x + 5y - 2z = 5,\ 2x - y + 4z = 12$	$\varphi = x^3y - yz + 4x$
12	$z = x^2 + 2y,\ x = 0, 2,\ y = 0,\ y = 2 - x$	$x + 4y + z = 12,\ 3x - y + 2z = 7,\ 2x + y + 3z = 13$	$\varphi = xy^3 + z^2 - 3y$
13	$z = y - 2x,\ x = 0, 1,\ y = x^2,\ y = x$	$4x + y + 2z = 12,\ 2x + 3y - z = 5,\ x - 2y + 5z = 12$	$\varphi = 2y^2z - x^2 + z$
14	$z = 1 + x + y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 1 - x^2$	$2x - 3y + 4z = 8,\ 5x + y - z = 4,\ x + 2y + 3z = 14$	$\varphi = x^2z^2 - 3xy + 2y$
15	$z = x^2 - y^2,\ x = 0, 1,\ y = x,\ y = 2$	$3x + y - 2z = -1,\ x + 4y + 3z = 18,\ 2x - y + 3z = 9$	$\varphi = z^3 + 2x^2y - 3z$
16	$z = 3x + y^2,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = \sqrt{x}$	$x + 3y + 2z = 13,\ 4x - 2y + z = 3,\ 2x + y + 4z = 16$	$\varphi = xy^2z - x^2 + 4y$
17	$z = 2 - x^2 - y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = x$	$5x - y + 2z = 9,\ 2x + 4y - z = 7,\ x + 2y + 3z = 14$	$\varphi = 3x^3 - yz^2 + 2x$
18	$z = xy + x,\ x = 0, 2,\ y = 0,\ y = x/2$	$2x + 5y - z = 9,\ 3x - y + 2z = 7,\ x + 2y + 4z = 17$	$\varphi = y^3z - 2xz + 3y$
19	$z = 4 - 2x - y,\ x = 0, 1,\ y = x^2,\ y = 1$	$3x - y + 4z = 13,\ x + 3y - 2z = 1,\ 2x + 4y + z = 13$	$\varphi = x^2y^3 - z^3 + x$
20	$z = y^2 + 2x,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 2 - 2x$	$4x + 2y - 3z = -1,\ x + 5y + z = 14,\ 3x - y + 2z = 7$	$\varphi = 2z^3 - x^2y + 4z$
21	$z = x + 3y,\ x = 0, 1,\ y = x^3,\ y = \sqrt{x}$	$x + 2y + 5z = 20,\ 3x - y + z = 4,\ 2x + 4y - z = 7$	$\varphi = x^3z + y^2 - 2x$
22	$z = 5 - x - 2y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 1 - x$	$2x - y + 4z = 12,\ 4x + 3y - z = 7,\ x + 2y + 3z = 14$	$\varphi = xy^2 - 3z^2 + 2y$
23	$z = x^2 + 3y,\ x = 0, 1,\ y = x,\ y = 2 - x^2$	$3x + 4y - z = 8,\ x - 2y + 3z = 6,\ 2x + y + 2z = 10$	$\varphi = y^2z^2 - x^3 + z$
24	$z = 2y - 3x,\ x = 0, 2,\ y = 0,\ y = 1 - x/2$	$5x + y - 3z = -2,\ 2x + 3y + z = 11,\ x - y + 4z = 11$	$\varphi = 4x^2z - y^2 + 3x$
25	$z = 1 + x^2 + y^2,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = x^2$	$x + 5y - 2z = 5,\ 3x - y + 4z = 13,\ 2x + 2y + z = 9$	$\varphi = xyz^2 + 2x^2 - y$
26	$z = 3 - 2x + y,\ x = 0, 1,\ y = x,\ y = 1$	$4x - 3y + z = 1,\ 2x + y + 3z = 13,\ x + 4y - 2z = 3$	$\varphi = z^3x - 3xy + 2z$
27	$z = x^2 + y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 2 - x$	$2x + 4y - z = 7,\ 3x - y + 2z = 7,\ x + 2y + 3z = 14$	$\varphi = 2x^3y - z^2 + 4y$
28	$z = 4 - x - 2y,\ x = 0, 2,\ y = 0,\ y = 1 - x/2$	$3x + y + 4z = 17,\ x + 4y - z = 6,\ 2x - y + 3z = 9$	$\varphi = x^2y^2z - 3x + z$
29	$z = 2x + y^2,\ x = 0, 1,\ y = x^2,\ y = 1$	$5x - 2y + z = 4,\ x + 3y + 2z = 13,\ 2x + y - z = 1$	$\varphi = y^3z^2 - 2xy + 3x$
30	$z = 3 - x^2 + y,\ x = 0, 1,\ y = 0,\ y = 1 - x$	$x + 3y + 4z = 19,\ 4x - y + 2z = 8,\ 2x + 2y - z = 3$	$\varphi = 3xz^3 - y^2 + 2y$