формулы столбца **K**, удобно, если в формуле оно будет *автоматически изменяться* при изменении параметров системы. Это означает, что формулы должны содержать *не числовое значение амплитуды*, а ссылку на ячейку, в которой это значение находится (в используемом шаблоне таблицы – это ячейка D23). Определение максимального значения проводят с помощью встроенной функции **МАКС()**, где в качестве аргумента необходимо использовать блок ячеек J6:J56, содержащий значения координаты. Функция находится в категории *Статистические*.

3) Начальная фаза φ_o колебаний находится из следующих соображений. В таблице исходных данных задано начальное смещение x_o, т.е. координата в момент времени $t_o = 0$. Фаза колебаний в этот момент $\varphi = \varphi_o$ и смещение: $x_o = x_{\max} \sin\varphi_o$, откуда $\varphi_o = \arcsin\dfrac{x_o}{x_{\max}}$. Начальная фаза рассчитывается в ячейке D20.

4) Построить график зависимости $x^{теор}(t)$ на имеющейся диаграмме.

4. Изменяя $t_{\max}$ (а, следовательно, и интервал времени Δt) при заданных параметрах k, m, x_o и v_{ox}, проследить за изменением точности вычислений по приближенным формулам, сравнивая графики колебаний. Таким же образом можно определить и границы применимости данной модели.

5. Добавить в таблицу новую колонку "*Скорость, м/с"* в столбце **L** и провести расчет скорости колеблющегося тела по формуле (*) (точное решение), пользуясь планом, изложенным в *задании 3*. Построить график зависимости $v_x^{теор}(t)$.

6. Задать цвет шрифта различных рядов данных построенной таблицы в соответствии с цветом соответствующих диаграмм.

7. Изменить вид диаграмм на *Точечная диаграмма со значениями*, *соединенными сглаживающими линиями без маркеров.* Добавить в таблицу исходных данных контрольные точки для заданного момента времени и вывести их на всех графиках.

Сохранение данных в файле.

Сохранить данные в файле *Лабораторная работа 5.xls*.

Лабораторная работа № 6-7.

Обработка результатов измерений и моделирование линейной зависимости двух взаимосвязанных величин.

Загрузка файла таблицы.

1. Запустить *Excel.*
2. Открыть шаблон *Модель 6-7_Обработка результатов измерений.xlt.*

Открытый шаблон содержит два листа: **Модель 6** и **Модель 7**. На первом

листе представлены заготовки таблицы и основные формулы для вычислений среднего значения измеренной величины, абсолютной и относительной погрешности измерений. На втором – таблица для моделирования линейной зависимости.

1. Введение (к модели 6).

Предположим, что в результате эксперимента было получено N значений некоторой физической величины x. Обозначим через x_i результат i-го измерения величины x. *За наиболее вероятное значение измеряемой величины принимают ее* ***среднее арифметическое значение****, вычисленное из всего ряда измеренных значений*:

$$X_{\text{ср}} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}.$$

Каждое отдельно взятое измерение отличается от среднего. *Модуль разности среднего значения* $\langle x \rangle$ *и результата этого измерения* x_i называют *абсолютной погрешностью отдельного измерения*: $\Delta_i = \left| \langle x \rangle - x_i \right|$. ***Средняя абсолютная погрешность***

$$\Delta_{ср} = \langle \Delta \rangle = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| \langle x \rangle - x_i \right|}{N}.$$

Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах, что и измеренная величина. ***Относительная погрешность эксперимента***:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta_{ср}}{X_{ср}} \cdot 100\%$$

характеризует качество измерений и является безразмерной величиной.

Согласно правилам записи результата измерений окончательный результат эксперимента должен быть представлен в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \langle \Delta_x \rangle;\ \varepsilon_x$$

При записи результата следует руководствоваться следующими *правилами*:

- *Измеренное значение величины и погрешность должны быть представлены в одних и тех же единицах.*
- *При записи абсолютной погрешности следует округлять ее величину до двух значащих цифр, если первая из них является единицей, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях.*
- *Численное значение результата измерений всегда округляют или уточняют так, чтобы его последняя цифра оказалась в том же разряде, что и цифра погрешности.*

$1,\underline{2} \pm 0,2;\ 1,2\underline{4} \pm 0,03;\ 81,20 \pm 0,01;\ 1,2\underline{4}3 \pm 0,012;\ 0,90\underline{0} \pm 0,004;\ (396,\underline{2} \pm 0,5) \cdot 10^2$ *и т.д.*

- *Относительную погрешность всегда округляют до двух значащих цифр.*

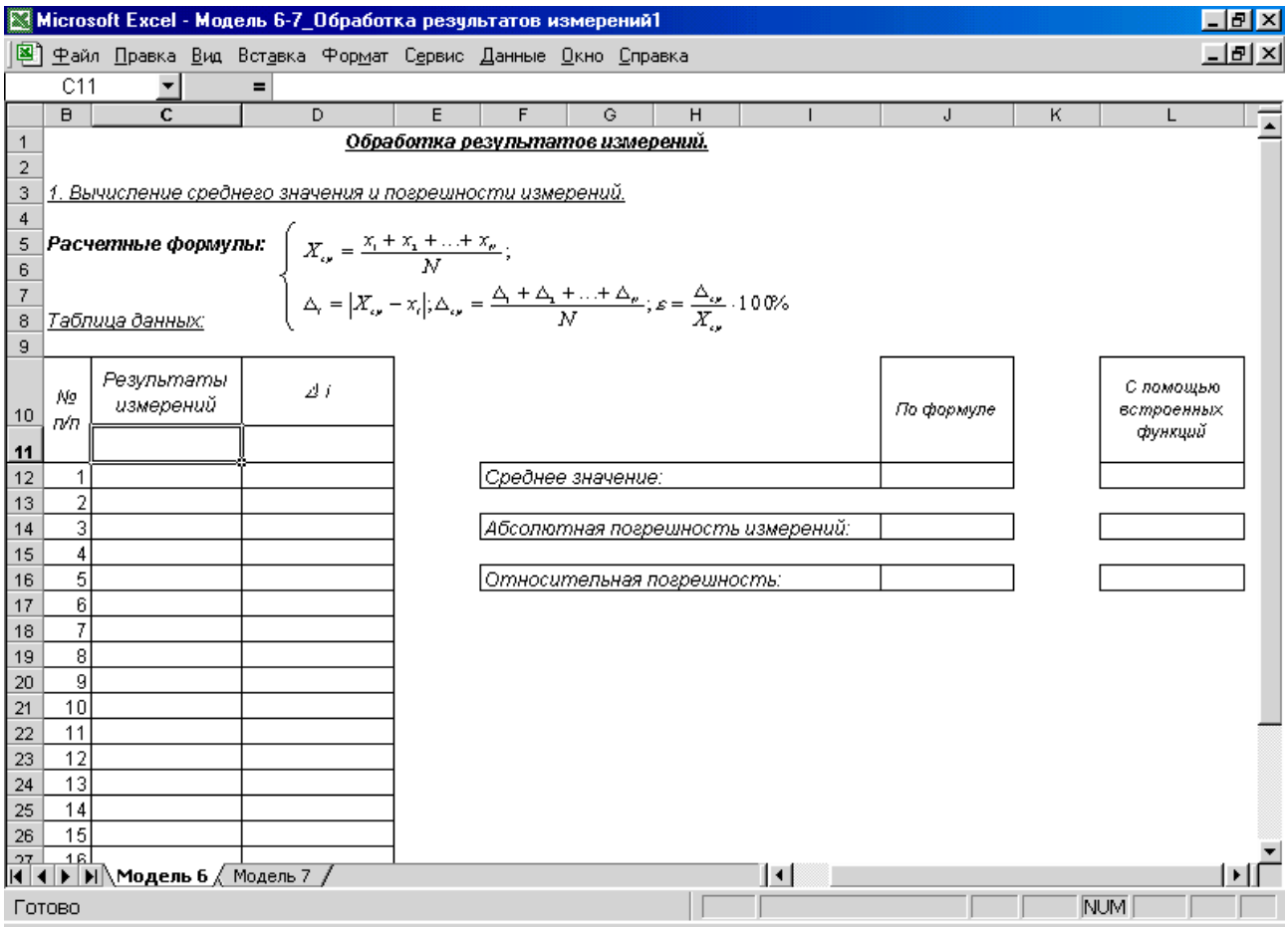


Таблица данных, приведенная на листе **Модель 6**, выполнена для 20 значений величины *x*, однако при необходимости ее можно продолжить. *Постоянными* величинами в данном случае является количество измерений *N* и среднее значение измеренной величины.

Заполнение таблицы.

1. Занести *исходные данные* в следующие ячейки:

1) в C11: название и единицы измерения физической величины *x*;

2) в D11: единицы измерения абсолютной погрешности;

3) в диапазон (C12:C31): измеренные в результате эксперимента значения физической величины *x* (см. ниже таблицы с примерами измерений. Если у вас нет собственных данных, воспользуйтесь этими таблицами.). Обратите внимание, что количество данных в таблицах различно.

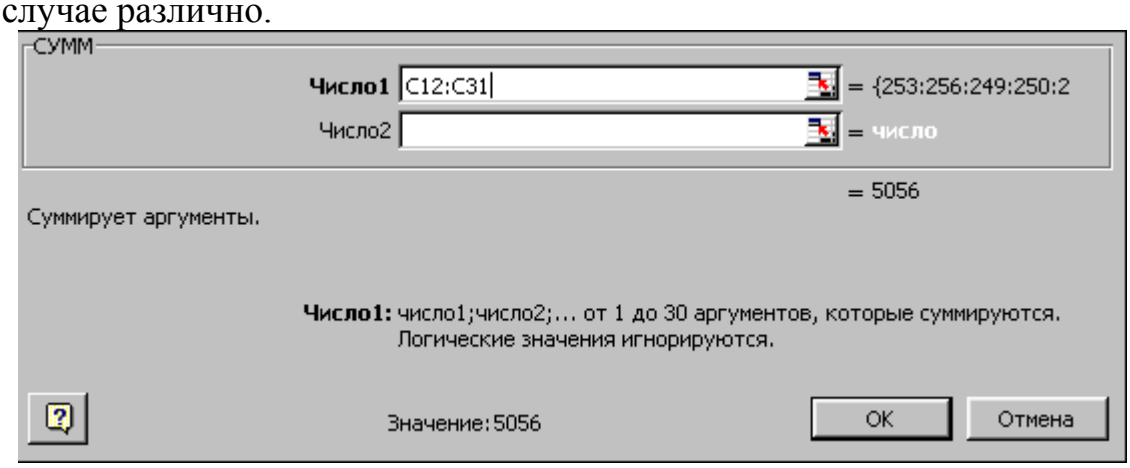
№№	*R, Ом*	*V, м³*	*L, м*	*v, м/с*	*I, мА*	*E, В*
1	283	3283	0,86	1909	0,63	5,56
2	312	3312	0,72	1875	0,58	5,58
3	322	3322	0,79	1899	0,74	5,55
4	285	3285	0,77	1845	0,78	5,56
5	292	3292	0,60	1949	0,70	5,56
6	286	3286	0,70	1913	0,74	5,59
7	278	3278	0,65	1836	0,75	5,55
8	285	3285	0,69	1884	0,82	5,54

9	306	3306	0,73	1842	0,68	5,56
10	296	3296	0,77	1874	0,69	5,57
11	264	3264	0,72	1949	0,76	5,56
12	282	3282	0,79	1931	0,62	5,57
13	300	3300	0,65	1948	0,72	5,59
14	305	3305	0,66	1909	0,88	5,60
15	279	3279	0,70	1911	0,65	5,56
16	277		0,74	1895	0,81	5,55
17	283		0,84	1942	0,79	5,56
18	292		0,76		0,77	5,56
19	278		0,80		0,66	
20	266				0,76	

2. Расчеты указанных выше величин (среднего значения, средней абсолютной погрешности и относительной погрешности) провести двумя способами: пользуясь определяющими их формулами и встроенными функциями.

1 способ.

Расчет среднего значения. Занести формулу для расчета среднеарифметического значения в ячейку J12 (см. определение данной величины и расчетные формулы). При создании формулы использовать встроенную функцию **СУММ()**, где в качестве аргумента указать диапазон ячеек, содержащих числовые данные (т.е. измеренные значения). Число измеренных значений *N* в каждом конкретном случае различно.



Расчет абсолютной погрешности. Для вычисления средней абсолютной погрешности необходимо провести промежуточные расчеты, а именно: предварительно рассчитать абсолютные погрешности отдельных измерений (см. определение и расчетные формулы), используя функцию **ABS()**, которая вычисляет модуль аргумента, указанного в скобках. Формула заносится в ячейку D12 и затем копируется в диапазон нижележащих ячеек этого столбца.
Рассчитать в ячейке J14 среднюю абсолютную погрешность.

После завершения создания формулы назначить ячейке J14 экспоненциальный формат (*Формат-Ячейки…*, вкладка *Число*) с таким количеством десятичных знаков, чтобы абсолютная погрешность содержала 1-2 значащие цифры

в соответствии с приведенными выше правилами.

Расчет относительной погрешности. Формулу для расчета относительной погрешности ввести в ячейку J16. После подтверждения ввода назначить данной ячейке процентный формат с таким количеством десятичных знаков, чтобы относительная погрешность содержала две значащие цифры.

2 способ.

Расчет среднего значения с использованием встроенной функции СРЗНАЧ().

Вычислить среднее значение измеренной величины с помощью встроенной функции **СРЗНАЧ()** (категория *Статистические*) в ячейке L12. В качестве аргумента этой функции можно использовать числа, имена, массивы или ссылки на ячейки, содержащие числовые данные. При этом, если аргумент, который является массивом или ссылкой, содержит тексты, логические значения или пустые ячейки, то такие значения игнорируются; однако, ячейки, которые содержат нулевые значения, учитываются. В нашем случае аргументом является диапазон ячеек столбца **C** таблицы.

Сравнить полученное значение с рассчитанным в ячейке J12.

Расчет средней абсолютной погрешности с использованием встроенной функции СРОТКЛ().

Вычислить среднюю абсолютную погрешность с помощью встроенной функции **СРОТКЛ()** (категория *Статистические*) в ячейке L14. Синтаксис ее полностью аналогичен функции **СРЗНАЧ**.

Аргументом этой функции будет являться тот же самый диапазон ячеек в столбце **C**, что и в предыдущем случае.

Нетрудно видеть, что второй способ создания формул предпочтительней по ряду причин: *во-первых*, он не требует промежуточных вычислений (как, например, абсолютных погрешностей отдельных измерений – это означает отсутствие дополнительного столбца **D**); *во-вторых*, сокращает количество шагов по созданию формулы, поскольку не требует такого количества данных, как первый способ (так, например, здесь не нужно вводить число данных – оно подсчитывается автоматически, а также отпадает необходимость в операции деления); *в-третьих*, второй способ позволяет выделять диапазон, в котором часть ячеек будет незаполнена или содержать текст - такие ячейки при расчете средних значений и погрешностей игнорируются. Так, в наших примерах можно составить одну формулу для диапазона ячеек C12:C31, независимо от того, какая часть ячеек из этого диапазона заполнена, можно даже указать целиком столбец (C:C). В первом же способе необходимо каждый раз высчитывать количество заполненных ячеек.

Относительную погрешность в ячейке L16 рассчитать по определению этой величины.

В результате вычислений могут получаться числа, содержащие достаточно большое количество цифр, что недопустимо при записи погрешностей. Поэтому необходимо назначить данным ячейкам (L14, L16) нужный формат (экспо-

ненциальный, числовой или процентный) с соответствующим числом десятичных знаков (подробнее см. выше). Среднее значение при записи окончательного результата округляется в соответствии с правилами, указанными во введении. В большинстве случаев удобнее всего оказывается экспоненциальный формат.

Задание:

1. Изменить имя листа (**Модель 6)**.

2. Назначить числовым данным в столбце **C** (диапазон C12:C31) единый формат (например, *экспоненциальный* или *числовой* с определенным количеством десятичных знаков; а также определенный тип выравнивания).

3. Во всех формулах, где в качестве аргументов используются ссылки на блоки ячеек типа C12:C?? или D12:D?? (здесь **C??** и **D??** – адреса последних ячеек, содержащих числовые данные, в столбцах **C** и **D** таблицы), провести замену их ссылками на диапазоны C:C и D:D.

Заменить в этих же формулах конкретное в каждом случае число измерений *N* функцией **СЧЕТ()** (категория *Статистические*), подсчитывающей количество ячеек, *содержащих числовые данные*, в указанном в качестве аргумента диапазоне (в данной задаче – это диапазон C:C).

Убедиться, что значения выражений при этом не изменились. Это означает, что указанные функции допускают использование диапазонов, часть ячеек которых не содержит числовых данных - пуста или содержит текст (в нашем случае – это диапазоны ячеек столбцов C:C и D:D).

Сохранение данных в файле.

Сохранить данные в файле *Лабораторная работа 6-7.xls*.

2. Введение (к модели 7).

Предположим, что в результате эксперимента было получено N пар значений двух взаимосвязанных величин x и y: (x_i, y_i) (i =1, 2, …, N) и из теории известно, что эти величины связаны между собой линейной зависимостью вида: $y^{теор} = ax + b$. Однако из-за погрешностей измерительных приборов, а также наличия каких-то случайных факторов значения измеряемых величин будут отличаться от истинных. В результате, если нанести результаты эксперимента на график, то точки будут иметь некоторый разброс, поэтому невозможно найти такую прямую, которая проходила бы через все экспериментальные точки*С аналитической точки зрения* задача обработки результатов измерений состоит в нахождении параметров a и b, при которых уравнение $y^{теор} = ax + b$ (1) описывает данные эксперимента наилучшим образом. Один из возможных методов определения этих параметров называется *методом наименьших квадратов*.

Введем разность значений величины y_i (полученной из эксперимента) и $y_i{}^{расч}$ (полученной из уравнения (1)). Для каждого i -го значения эта разность имеет вид

$$r_i = y_i^{расч} - y_i . \qquad (2)$$

Если значения коэффициентов a и b подобраны наилучшим образом, то около половины точек будет лежать выше рассчитанной прямой (*т.е.* $r_i < 0$), *а другая половина точек - ниже прямой* (*т.е.* $r_i > 0$). Поскольку значения r_i могут быть как больше, так и меньше нуля, вводят величину квадрата разности значений r_i^2, где

$$r_i^2 = \left(y_i^{расч} - y_i\right)^2 . \qquad (2\text{-а})$$

Критерий наилучшего описания экспериментальных данных (*критерий Лежандра*) *состоит в том, чтобы сумма вида*

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i^{расч} - y_i\right)^2 ,$$

была минимальной (здесь N – число измерений).

Выразим $y_i^{расч}$ из уравнения (1) и подставим в (2). Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2 . \qquad (3)$$

Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти такие коэффициенты a и b, при которых значение выражения вида $\sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2$ было минимальным.

Найдем производные от (3) по a и по b и приравняем их к нулю. В общем случае эти выражения будут иметь вид:

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} r_i^2}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \sum_{i=1}^{N} r_i^2}{\partial b} = 0 . \qquad (4)$$

Подставляя (3) в (4), получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2}{\partial a} = 0; & (5) \\ \dfrac{\partial \sum_{i=1}^{N} (ax_i + b - y_i)^2}{\partial b} = 0. & (6) \end{cases}$$

Т.к. величины b, x и y не зависят от a, то выражение (5) принимает вид:

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i^2 + \sum_{i=1}^{N} bx_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \,. \quad (7)$$

Аналогично из (6) получим:

$$\sum_{i=1}^{N} ax_i + \sum_{i=1}^{N} b = \sum_{i=1}^{N} y_i \,. \quad (8)$$

Таким образом, мы получили систему из двух уравнений для нахождения коэффициентов a и b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{N} x_i + Nb = \sum_{i=1}^{N} y_i. \\ a\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{cases} \quad (9)$$

Решая методом Крамера систему уравнений (9) (и опуская в формулах индекс суммирования), получим значения коэффициентов a и b в следующем виде:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & N \\ \sum x_i y_i & \sum x_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}; \; b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i & N \\ \sum x_i^2 & \sum x_i \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

Раскрывая определители в (10), находим выражения для a и b:

$$a = \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i - N \cdot \sum x_i \cdot y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \cdot \sum x_i^2}; \quad (11)$$

$$b = \frac{\sum x_i \cdot \sum x_i \cdot y_i - \sum x_i^2 \cdot \sum y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - N \cdot \sum x_i^2}. \quad (12)$$

Если прямая проходит через начало координат, то уравнение такой прямой $y = kx$ и параметр k определяется как

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

Как видно, формулы для вычисления параметров прямой достаточно сложны, в то время как встроенные функции *Excel* позволяют провести расчет, не вникая в суть самих формул.

С графической точки зрения считается, что прямая проведена наилучшим образом, если экспериментальные точки располагаются по обе стороны от этой прямой приблизительно на одинаковом от нее расстоянии.

Важно отметить, что данный метод используется всякий раз, когда речь идет о линейной зависимости двух величин.

Заполнение таблицы.

1. Открыть лист **Модель 7**.
2. Занести *исходные данные* в следующие ячейки:

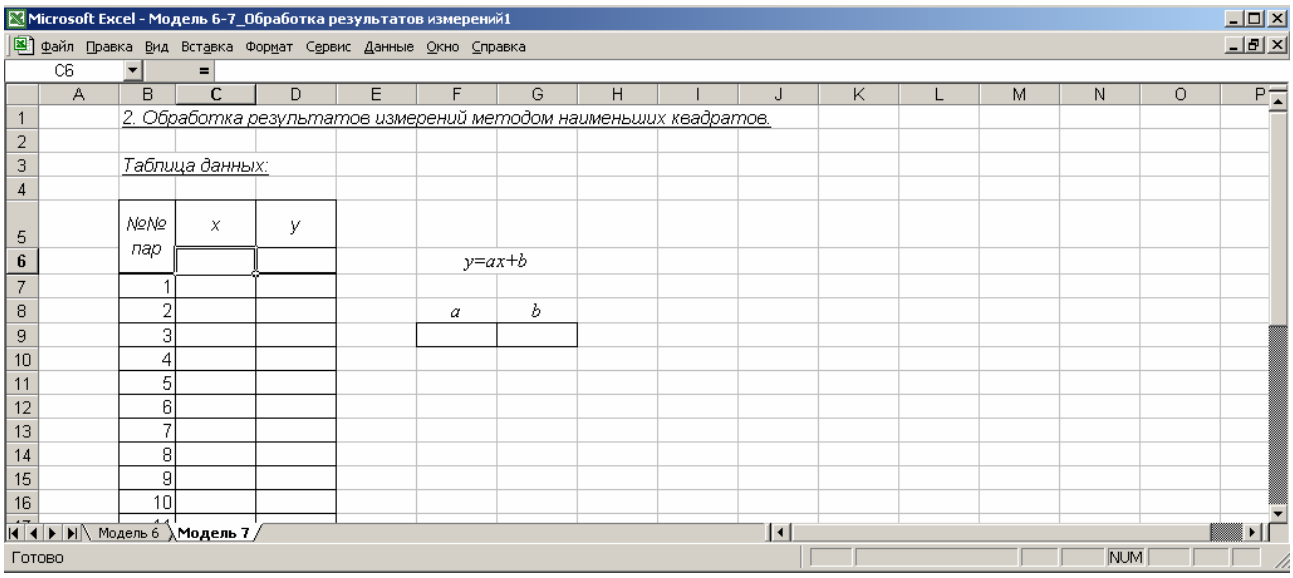
1) в C6: условное обозначение (или название) и единицы измерения физической величины *x*;

2) в D6: условное обозначение (или название) и единицы измерения физической величины *y*;

3) в диапазон (C7:C??): измеренные в эксперименте значения физической величины *x* (здесь символы ?? обозначают, как и в предыдущей модели, номер последней строки, содержащей числовые данные). Таблицы с примерами измерений приведены ниже (количество данных в таблицах различно!);

4) в диапазон (D7:D??): измеренные значения величины *y*.

Таблица данных, содержащаяся в шаблоне, выполнена для 25 пар значений величин *x* и *y*, однако при необходимости ее можно продолжить.



Примеры экспериментальных данных.

x, м	***y, м***	***x, м***	***y, м***	***ΔT, K***	***E, B***	***t, c***	**v, *м/с***	***B, Тл***	**Δφ , *B***
-1	15,81	-2	-3,44	-5	2,10	0	-0,61	3	-0,99
1	15,14	-1	0,86	-4	1,11	1	0,17	4	0,16
3	11,47	0	5,23	-3	4,94	2	4,56	5	2,30
5	22,93	1	-0,46	-2	7,46	3	7,77	6	4,96
7	13,26	2	6,90	-1	7,82	4	9,16	7	3,55
9	19,52	3	7,57	0	9,65	5	8,12	8	5,30
11	17,67	4	4,79	1	12,79	6	13,79	9	4,34
13	28,60	5	7,45	2	15,03	7	13,63	10	8,19
15	32,63	6	4,39	3	18,29	8	17,65	11	6,43
17	27,83	7	7,32	4	16,07	9	19,80	12	8,91
19	34,64	8	10,26	5	21,79	10	20,02	13	8,22
21	36,11	9	10,71	6	23,60	11	21,16	14	10,01
23	35,25	10	9,12	7	22,09	12	21,75	15	10,21
25	39,42	11	14,48	8	28,12	13	25,40	16	13,93
27	34,53	12	11,86	9	25,62	14	29,15	17	11,92
29	45,56	13	15,89	10	31,44	15	28,45	18	16,09
31	36,53	14	19,17	11	29,85	16	32,69	19	15,93
33	45,38	15	18,40	12	32,25	17	36,05	20	15,53
35	49,30	16	21,82	13	33,54	18	37,77	21	16,67
37	52,83	17	16,73	14	40,27	19	36,52	22	16,78
39	56,57	18	22,84	15	37,92	20	37,56	23	18,17
41	46,49	19	21,63	16	40,42	21	44,29	24	19,34
43	47,72	20	22,41	17	45,79	22	45,96		
45	58,08	21	24,19			23	46,80		
47	59,84								

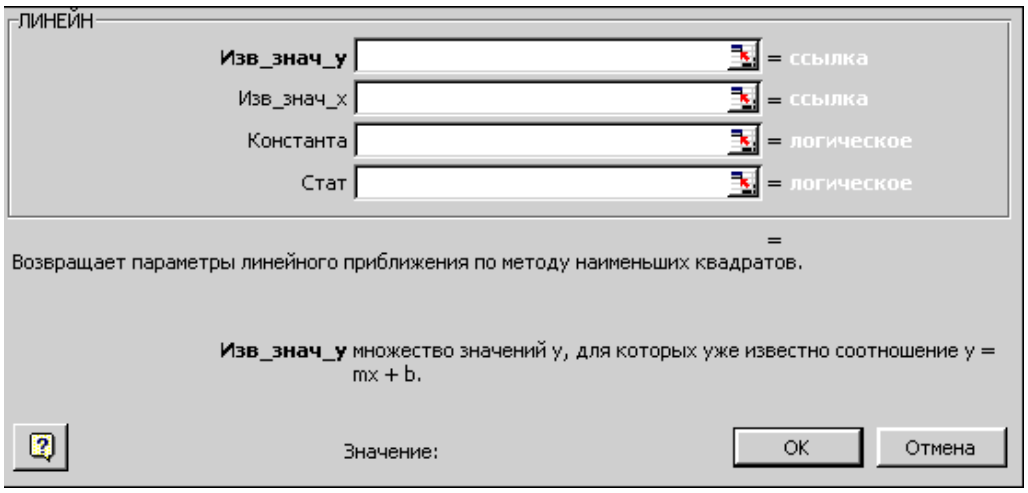
3. Рассчитать параметры прямой с помощью функции **ЛИНЕЙН()**. Синтаксис функции:

ЛИНЕЙН(*изв_знач_y*;*изв_знач_x*;*константа*;*стат*).

Функция вычисляет параметры прямой по методу наименьших квадратов. Работа с ней проводится по следующему плану:

- Выделить *диапазон* F9:G9 и выполнить команду *Вставка-Функция*…

- В категории *Статистические* выбрать функцию **ЛИНЕЙН**.



- В поле "*Изв_знач_y*" ввести диапазон ячеек, содержащих экспериментально найденные значения величины *y* (диапазон ячеек в столбце **D**, содержащий значения *y*, полученные экспериментальным путем).
- В поле "*Изв_знач_x*" – диапазон ячеек, содержащих значения величины *x* (диапазон ячеек в столбце **C**, содержащий экспериментально найденные значения величины *x*). Данные массивы обязательно должны содержать одинаковое количество ячеек (другими словами, *иметь одинаковый размер*).
- В поле *Константа* ввести логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа *b* была равна 0:
  - если аргумент *Конст* имеет значение ИСТИНА или опущен, то *b* вычисляется обычным образом;
  - если аргумент *Конст* имеет значение ЛОЖЬ, то *b* полагается равным 0 (прямая проходит через начало координат, т.е. выполняется соотношение $y = kx$).
- Последнее поле можно оставить пустым.
- Чтобы в задаче вычислялись оба параметра прямой (*a* и *b*) (для чего на рабочем листе были выделены сразу две ячейки!), ввод формулы необходимо завершить комбинацией клавиш – *Ctrl* + *Shift* + *Enter*.

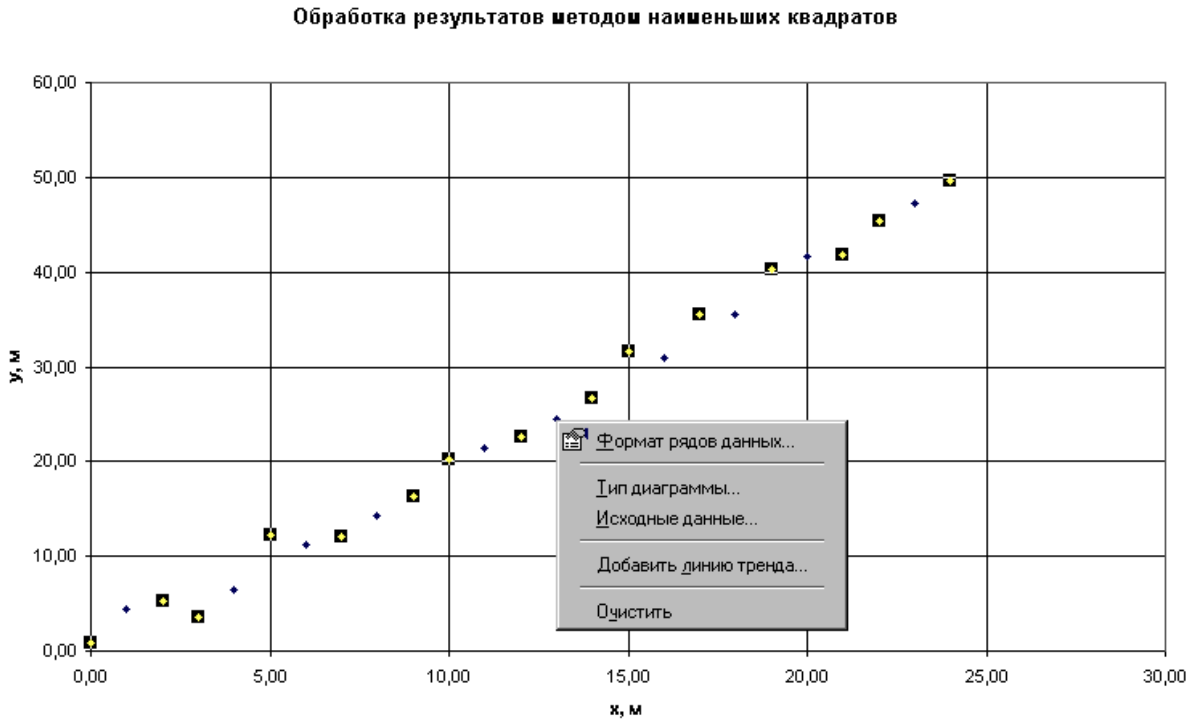
Построение графика зависимости y(x).

1. Выделить диапазон ячеек, содержащих числовые данные, и провести построение графика зависимости $y(x)$.
2. Основные требования:
- тип диаграммы и ее вид - *Точечная* (в этом случае на графике будут откладываться только точки без соединяющих их линий);
- название диаграммы – Обработка результатов измерений методом наименьших квадратов (или название вашей зависимости, например, Вольт-амперная характеристика или График зависимости скорости от времени и т.д);
- название *Оси категорий* – название, условное обозначение и единицы измерения величины *x*, откладываемой по этой оси;
- название *Оси значений* – название, условное обозначение и единицы измерения величины *y*, откладываемой по этой оси;

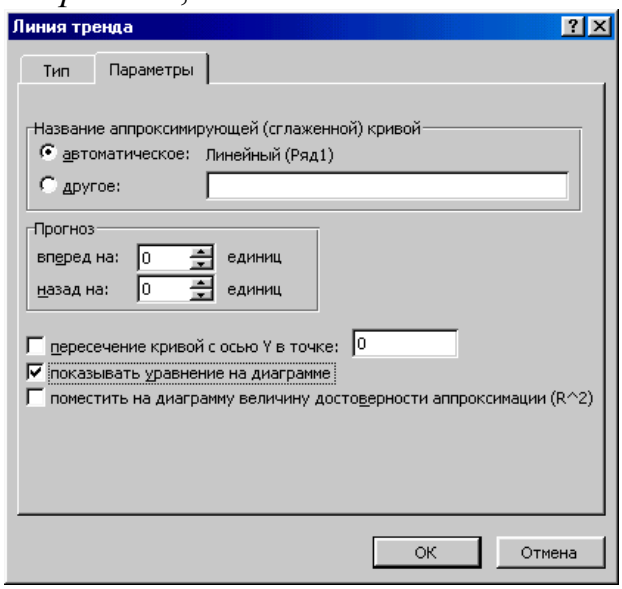
- расположить диаграмму на отдельном листе.

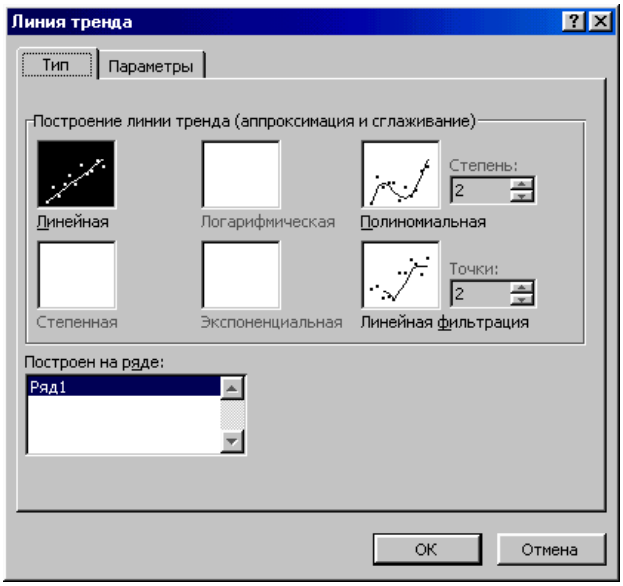
3. Добавить прямую, построенную на основании расчетов по методу наименьших квадратов (так называемую ***линия тренда***):

- вызвать контекстное меню по одной из точек графика и выбрать пункт *Добавить линию тренда…*;
- в диалоговом окне *Линия тренда* на вкладке *Тип* щелкнуть в поле "*Линейная*";



- на вкладке *Параметры* установить флажок опции "*показывать уравнение на диаграмме*";





- сравнить параметры прямой, уравнение которой выводится на графике, с полученными в результате вычислений с использованием встроенной функции.

Задание:

1. Изменить имя листа **Модель 7**.

2. Назначить единый формат числовых данных в каждом из столбцов таблицы (например, формат *числовой* с двумя десятичными знаками, выравнивание по центру ячейки).

3. В столбце **I** (диапазон I7:I??, где символы ?? обозначают номер последней строки, содержащей числовые данные) провести расчет значений переменной *y* в соответствии с формулой $y^{расч} = ax + b$ (параметры *a* и *b* находятся в ячейках F9 и G9 соответственно). Построить график зависимости *y*(*x*) для данных в ячейках в столбцах **C** и **I** (C7:C??;I7:I??) на отдельном листе *Диаграмма 2* (вид диаграммы – *Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями*).

4. Проверить, допускает ли функция

ЛИНЕЙН(изв_знач_*y*; изв_знач_*x*; константа; стат)

указания диапазонов известных значений *y* и *x*, часть ячеек которых не содержит числовых данных - пуста или содержит текст (это может быть, например, диапазон ячеек столбцов C:C и D:D).

Сохранение данных в файле.

Сохранить данные в файле *Лабораторная работа 6-7.xls.*