Лабораторная работа № 3.

Моделирование колебательного движения на примере математического маятника.

Если тело совершает свободные незатухающие колебания, то его координата с течением времени изменяется по закону косинуса или синуса:

$$x = x_{\max} \sin(\omega_o t + \varphi), \qquad (1)$$

где $x_{\max}$ - амплитуда, $(\omega_o t + \varphi)$ - фаза колебаний, φ - начальная фаза, ω_o - собственная циклическая (круговая) частота колебаний. Скорость (первая производная координаты по времени) и ускорение (вторая производная координаты по времени) при этом также будут изменяться по гармоническому закону:

$$\mathrm{v}_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x' = x_{\max}\omega_o \cdot \cos(\omega_o t + \varphi) = x_{\max}\omega_o \cdot \sin\left(\omega_o t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}\mathrm{v}_x}{\mathrm{d}t} = x'' = -x_{\max}\omega_o^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi) = x_{\max}\omega_o^2 \cdot \sin(\omega_o t + \varphi + \pi).$$

Для преобразования выражений мы воспользовались формулами приведения. Отсюда видно, что скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$, а ускорение - на π, т.е. находится в противофазе со смещением.

Одной из самых простых и распространенных моделей колебательных систем является математический маятник: материальная точка массы *m*, подвешенная на нерастяжимой нити длиной *L* и совершающая колебания в вертикальной плоскости. Круговая частота колебаний в этом случае принимается равной

$$\omega_o = \sqrt{g/L},$$

период колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{L/g}$.

Примечательно, что в случае свободных колебаний круговая частота и период колебаний определяются свойствами самой системы и не зависят от начальных условий (начального смещения или, что то же самое, начальной фазы).

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы построить графики зависимости *x*(*t*), v(*t*), *a*(*t*) и проследить за их изменением при изменении параметров системы.

Загрузка файла таблицы.

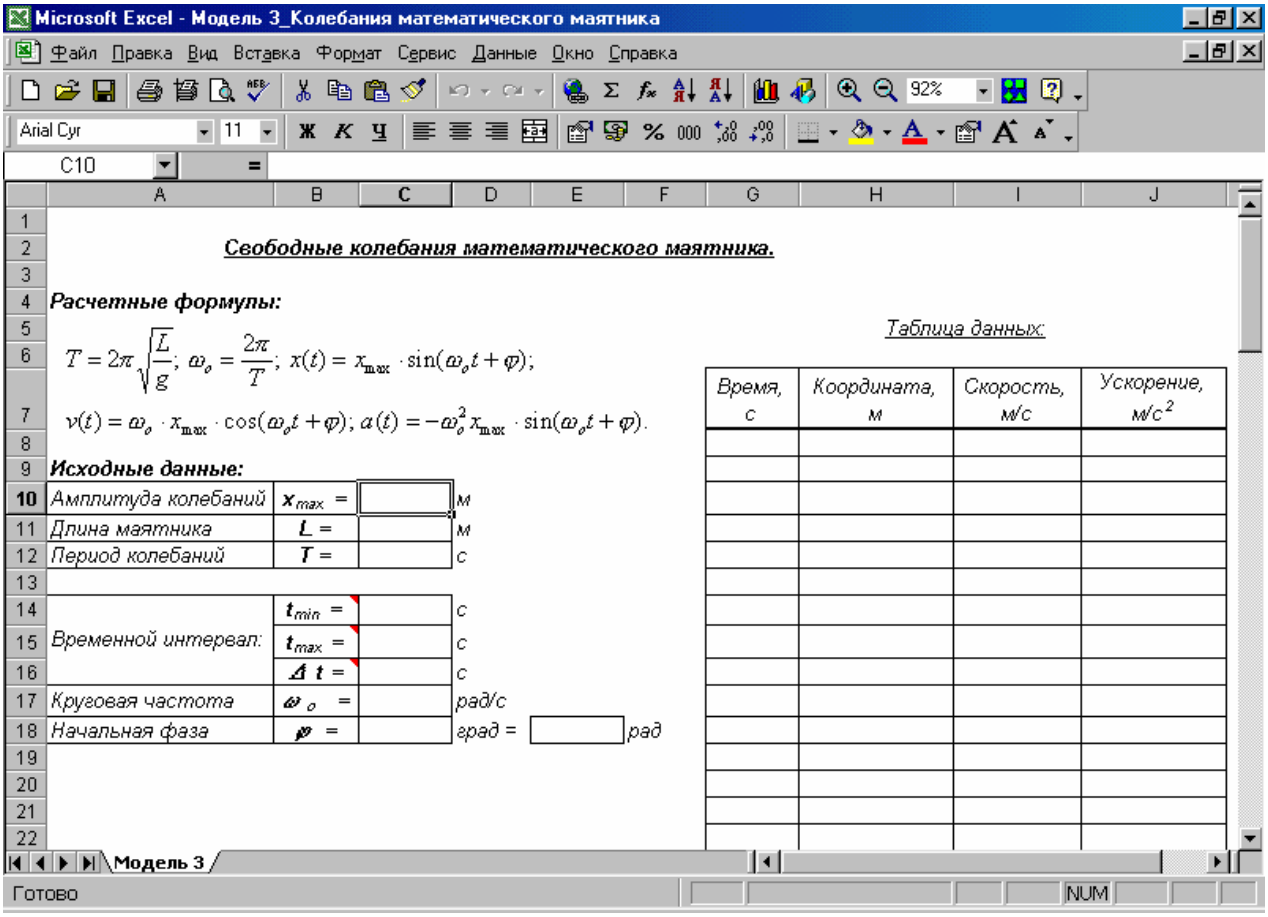
1. Запустить *Excel.*
2. Открыть шаблон *Модель 3_Колебания математического маятника.xlt.*

Очевидно, исходными данными являются:

1) амплитуда (максимальное смещение) $x_{\max}$;
2) начальная фаза φ;
3) длина нити *L*;
4) временной интервал.

Постоянные величины: амплитуда, начальная фаза, длина нити, период (частота) колебаний. *Переменные* – смещение тела в каждый момент времени (коор-

дината x), скорость и время.



Заполнение таблицы.

Таблица рассчитана на 101 точек, т.е. число подинтервалов, на которые разбивается временной интервал, равно 100.

1. Занести *исходные числовые данные* в ячейки C10, C11, C14, C15 и C18. Для примера:

$$x_{max}=0{,}3\ м;\ L=1\ м;\ t_{max}=10\ с;\ \varphi=30^\circ.$$

Начальный момент времени (*ячейка C14*) *удобно принять равным нулю*.

2. Ввести формулы, позволяющие рассчитать период, частоту колебаний, а также интервал времени Δt в ячейки C12, C17 и C16 соответственно. Количество значащих цифр в ускорении свободного падения ($g\approx9{,}80665\ м/с^2$) и числе π (π≈3,14159265358979) выбирается в соответствии с данными задачи.

3. Произвести пересчет начальной фазы из градусной меры в радианы (тригонометрические функции, используемые при расчетах координаты, скорости и ускорения, вычисляют значение угла, заданного в *радианах*) с помощью встроенной функции РАДИАНЫ():

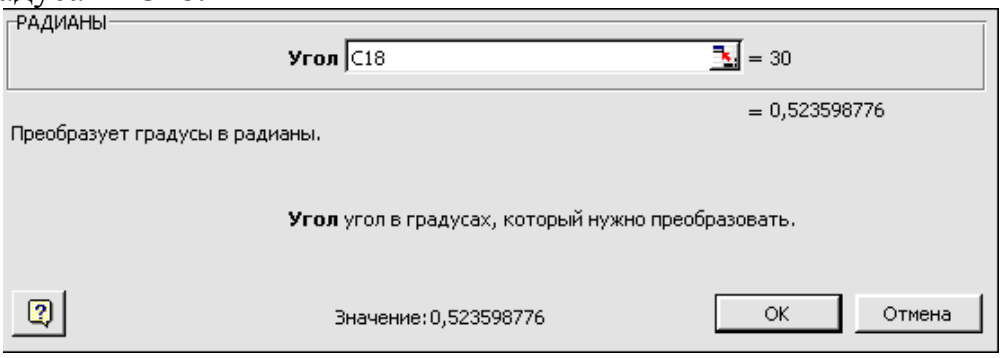
1) выделить ячейку E18;

2) вызвать *Мастер функций*;

3) в поле "*Категория*" выбрать *Математические*, в поле "*Функция*:" – РАДИАНЫ. Данная функция преобразует градусы в радианы;

4) в поле "*Угол*" *панели формул* ввести адрес ячейки, содержащий значение

угла в градусах - C18.



4. Заполнить *Таблицу данных* (*Время-Координата-Скорость-Ускорение*).

1) Столбец **G** должен содержать значения времени, отличающиеся на величину Δt, при этом ячейку G8 необходимо *связать* с C14, чтобы отслеживать изменения значения начального момента времени. В следующую ячейку столбца вводится формула, которая затем копируется в диапазон G10:G108.

2) В столбцах **H**, **I**, **J** вычисляются значения координаты, скорости и ускорения в соответствующие моменты времени из столбца **G**.

Примечание: При составлении формул не забывайте использовать абсолютные ссылки для *постоянных* величин.

5. Изменить имя листа, содержащего таблицу (**Модель 3**), например, на **Колебания маятника**.

Построение графиков.

По результатам расчетов необходимо построить три графика: $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$. Поскольку во всех случаях по оси *Ox* откладывается одна и та же величина (время), все три зависимости можно представить в одной системе координат. Такой способ построения применяется в тех случаях, когда необходимо провести сравнение нескольких различных (неоднородных) величин или исследовать поведение некоторой величины в зависимости от начальных условиях или условий проведения эксперимента. Однако он имеет и недостатки: он применим только тогда, когда сравниваемые величины имеют один и тот же порядок.

Диапазон данных для построения диаграммы – блок ячеек G8:J108. Программа *Excel* автоматически будет рассматривать этот диапазон как *три ряда данных*, а именно: *1-ый ряд* – (G8:H108) (зависимость координаты от времени), *2-ой ряд* – (G8:G108; I8:I108) (зависимость скорости от времени) и *3-ий ряд* – (G8:G108; J8:J108) (зависимость ускорения от времени), причем первая колонка (диапазон G8:G108) будет *общей для всех остальных.*

Дальнейшее построение ведется по стандартному плану. Основные требования:

- вид диаграммы – *Точечная* или *Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями,* или *Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров*;
- имя рядов данных: *Смещение*, *Скорость* и *Ускорение* (вводится с клавиатуры в соответствующее поле);

- название диаграммы и наименование осей координат с указанием единиц измерения величин, откладываемых по этим осям, задать в виде:

"*Название диаграммы*" - Графики колебательного процесса;

"*Ось X* (*категорий*)" – Время t, с;

"*Ось Y* (*значений*)" – Координата (м); Скорость (м/с); Ускорение (м/с^2);

- включить основные линии сетки по одной или обеим осям;
- включить опцию вывода легенды и указать ее размещение на диаграмме;
- расположить диаграмму на отдельном листе.

Задание:

1. Изменяя начальные данные (начальное смещение и фазу, длину маятника), проследить за изменением вида графиков.

2. Разобрать вопрос о соотношении величин x_{max} и L.

3. Определить сдвиг фаз между колебаниями каждой пары величин. Это удобно выполнить для случая, когда начальная фаза колебаний равна нулю.

4. Задать для диапазона G8:J108 соответствующий формат числовых данных (*числовой* или *экспоненциальный* с определенным количеством десятичных знаков после запятой).

5. Изменяя момент времени t_{max} (и, тем самым, - интервал Δt), определить границы применимости данной модели.

6. Добавить в таблицу исходных данных контрольные точки для заданного момента времени и вывести их на всех графиках.

7. Найти среди встроенных функций *MS Excel* такие тригонометрические функции, как *тангенс*, *арксинус*, *арккосинус*, *арктангенс*. Выписать их синтаксис и назначение. Почему среди перечисленных функций нет котангенса? Помимо подсказки, которая выводится в каждом диалоговом окне *Мастера*, можно дополнительно получить развернутую справку по любой из выбранных функций нажатием функциональной клавиши **F1**.

8. Кроме функции РАДИАНЫ(), позволяющей преобразовать величину угла из градусной меры в радианы, существует функция ГРАДУСЫ(), осуществляющая обратную операцию. Найти ее в *Мастере функций* и разобрать синтаксис.

9. Провести построение каждого графика в отдельности.

10. Изменить формулы, содержащие число π: в них вместо набора значения числа π необходимо использовать встроенную функцию ПИ() (категория – *Математические*, используется без аргумента) и округлить результат до нужного числа значащих цифр с помощью встроенной же функции ОКРУГЛ() (см. *Мастер функций*, категория *Математические*). Синтаксис функции: ОКРУГЛ(*число; количество_цифр*). Работа с *Мастером функций* проводится по описанному выше плану. В поле "*Число"* в этом случае вводится функция ПИ() (можно непосредственно с клавиатуры в русской раскладке или с использованием правил работы с вложенными функциями – см. **Приложение**), а в поле

"*Количество_цифр*" – количество десятичных разрядов, до которого нужно округлить число. При этом:

- если *количество_цифр* больше 0, то число округляется до указанного количества десятичных разрядов справа от десятичной запятой;
- если *количество_цифр* равно 0, то число округляется до ближайшего целого;
- если *количество_цифр* меньше 0, то число округляется слева от десятичной запятой.

11. Разобрать синтаксис всех функций округления чисел: ОКРВВЕРХ; ОКРВНИЗ; ОКРУГЛВВЕРХ; ОКРУГЛВНИЗ; а также ЦЕЛОЕ и ОТБР.

Примечание: В **Приложении** приведен список и краткое описание некоторых наиболее часто используемых при решении физических задач встроенных функций.

Сохранение данных в файле.

Сохранить данные в файле *Лабораторная работа 3.xls.*