Командные задания по Модулю 1 (max 4 балла)

Варианты для каждого задания соответствуют номерам команд.

Задание 1. Решение уравнения с параметром (1 балл)

Для заданного варианта решить уравнение относительно x. Определить значения параметров (выразить один параметр через другой или два других), при которых уравнение имеет: 1) кратные корни; 2) все вещественные корни. Можно использовать команды `solve`, `discrim`. Записать ответ в текстовом комментарии.

Варианты для задания 1

№	Уравнение	№	Уравнение	№	Уравнение
1	$ax^3 - bx^2 + c = 0$	2	$ax^3 - 3ax + b = 0$	3	$x^4 - ax^2 + bx + c = 0$
4	$ax^3 + bx^2 + a = 0$	5	$x^3 - 3ax^2 + bx - c = 0$	6	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
7	$x^3 - ax^2 + bx - ab = 0$	8	$ax^3 - bx^2 + bx - a = 0$	9	$x^4 - 2ax^2 + a^2 - b = 0$
10	$ax^3 - (a+b)x^2 + b = 0$	11	$x^5 - ax^3 + bx + c = 0$	12	$ax^4 - bx^3 + ax^2 - b = 0$
13	$x^3 - 3ax + 2b = 0$	14	$ax^4 + bx^3 + bx + a = 0$	15	$x^3-(a+b)x^2+(ab+c)x-ac = 0$

Задание 2. Решение нелинейной системы двух уравнений с двумя неизвестными (1,5 балла)

Решить систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x и y. Для заданного варианта требуется:

1. Найти все решения в явном виде, избавившись от конструкции `RootOf` (можно использовать `solve(..., explicit)` в новых версиях Maple, `_EnvExplicit`, `allvalues`, `convert(..., radical)`).
2. Найти приближённые (численные) значения решений.
3. Отобрать вещественные решения (можно использовать пакет `RealDomain`).
4. Построить графики кривых, настроить интервалы по осям. Обозначить точки пересечения полым кружком (`pointplot`, `symbol = circle`, `symbolsize`); подписать координаты каждой точки, подставляя значения найденных решений в `textplot`.
5. Проверить решения подстановкой в исходную систему.

Варианты для задания 2

№	Система	№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 y + x y^2 = 6 \end{cases}$	3	$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y-1} = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin x = y - 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6 \\ \log_2 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$	6	$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 = 2\,(x^2 - y^2) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$	9	$\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$
10	$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$	11	$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x + 1 \\ x^2 = y^3 - 3y + 1 \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos x = \cosh y \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} y = x^3 - x \\ xy = 1 \end{cases}$	14	$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ x^2 y + x y^2 + x + y = 4 \end{cases}$	15	$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Задание 3. Исследование рациональной дроби (1,5 балла)

Дана рациональная дробь

$$R(x) \;=\; \frac{P(x)}{Q(x)},$$

зависящая от одной переменной x, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с вещественными коэффициентами, $Q(x) \not\equiv 0$. Для заданного варианта требуется:

1. Найти **нули числителя**: решить уравнение $P(x) = 0$ (указать кратность корней, если она есть).

2. Найти **нули знаменателя**: решить уравнение $Q(x) = 0$ (это точки разрыва / вертикальные асимптоты; указать кратность полюсов).

3. Проверить, **сокращается ли дробь** (команда `gcd`) и при наличии общего множителя привести дробь к несократимому (нормальному) виду и **учесть выколотые точки** в области допустимых значений (ОДЗ) дроби.

4. Найти все x, при которых дробь принимает **два различных заданных значения** k_1 и k_2:

   $$R(x) = k_1, \qquad R(x) = k_2.$$

   Каждое уравнение сводится к полиномиальному $P(x) - k\,Q(x) = 0$. Если значение не достигается, **указать это в ответе**. Проверить найденные решения подстановкой в $R(x)$.

5. Построить **график** $R(x)$; отметить на нём:

- зелеными кружками нули числителя ;
- красными кружками нули знаменателя, также построить вертикальные асимптоты;
- синими квадратами точки, где $R(x) = k_1$ и $R(x) = k_2$, также построить горизонтальные прямые $y = k_1$ и $y = k_2$;
- вывести заголовок и легенду с пояснениями.

Варианты для задания 3

№	**Дробь** $R(x)$	№	**Дробь** $R(x)$	№	**Дробь** $R(x)$
1	$\frac{x^2-4}{x^2-1}$ $k_1=0,\ k_2=3$	2	$\frac{x^3-3x}{x^2-4}$ $k_1=1,\ k_2=-2$	3	$\frac{x^2+x-6}{x^2-9}$ $k_1=2,\ k_2=-1$
4	$\frac{x^3+1}{x^2-x-2}$ $k_1=0,\ k_2=2$	5	$\frac{x^4-1}{x^2+1}$ $k_1=1,\ k_2=5$	6	$\frac{x^2-5x+6}{x^3-8}$ $k_1=0,\ k_2=\frac{1}{2}$
7	$\frac{x^3-4x}{x^2-2x}$ $k_1=2,\ k_2=-1$	8	$\frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}$ $k_1=0,\ k_2=4$	9	$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-4}$ $k_1=1,\ k_2=-3$
10	$\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-x}$ $k_1=0,\ k_2=2$	11	$\frac{x^2-1}{x^3-x^2}$ $k_1=1,\ k_2=-2$	12	$\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2+2x+1}$ $k_1=0,\ k_2=3$
13	$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $k_1=0,\ k_2=\frac{3}{2}$	14	$\frac{x^4-2x^3-x^2+2x}{x^2-1}$ $k_1=1,\ k_2=-4$	15	$\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^2-x-2}$ $k_1=0,\ k_2=2$