Задания. Степенные ряды и разложение функций в Maple

Задание 1. Ряд Маклорена.

Для функции $f(x)$ из таблицы 1:

1. Найдите разложение в ряд Маклорена командой `taylor(f, x = 0, n)` до порядка $n = 8$
2. Преобразуйте результат в многочлен командой `convert(%, polynom)` и сохраните его в переменной p.
3. Извлеките коэффициенты при x^k, $k = 1, 2, 3, 4$, командой `coeff(p, x, k)` и сравните их с теоретическими значениями $f^{(k)}(0)/k!$.
4. Постройте на одном графике исходную функцию $f(x)$ и её многочлен Тейлора $p(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. Убедитесь, что вблизи нуля графики практически совпадают.
5. Оцените погрешность приближения: $\max\limits_{x \in [-0.5,\, 0.5]} \bigl|f(x) - p(x)\bigr|$.

Задание 2. Приближённые вычисления с помощью рядов.

Используя разложение из задания 1:

1. Вычислите приближённое значение $f(0.1)$, подставив $x = 0.1$ в многочлен $p(x)$.
2. Сравните с точным значением `evalf(f(0.1))` и найдите абсолютную погрешность.
3. Определите минимальное число членов ряда, необходимое для достижения точности 10^{-6} в точке $x = 0.1$.
4. Повторите оценку для $x = 0.5$. Во сколько раз больше членов ряда требуется во втором случае? Объясните причину роста числа членов.

Задание 3. Разложение в окрестности точки $x_0 \neq 0$.

Для той же функции (если она аналитична в точке $x_0 = 1$; иначе выберите другую точку в области аналитичности):

1. Найдите разложение в ряд Тейлора в точке $x_0 = 1$ командой `taylor(f, x = 1, 8)`.
2. Оцените радиус сходимости полученного ряда (по расстоянию от x_0 до ближайшей особой точки функции).
3. Постройте графики $f(x)$ и её многочлена Тейлора в окрестности x_0 на отрезке $[x_0 - R/2,\ x_0 + R/2]$, где R — радиус сходимости.
4. Покажите, что с ростом порядка n точность приближения в окрестности x_0 улучшается: постройте графики погрешности для $n = 4, 6, 8$.

Таблица 1. Функции для заданий 1–3

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	e^x	**18**	$x\,e^x$	**35**	$x/(1+x^2)$
2	e^{-x}	**19**	$x \sin x$	**36**	$\sin^2 x$
3	$\sin x$	**20**	$x \cos x$	**37**	$\cos^2 x$
4	$\cos x$	**21**	$x^2 e^x$	**38**	$\sinh^2 x$
5	$\sinh x$	**22**	$x^2 \sin x$	**39**	$\tan x$
6	$\cosh x$	**23**	$x^2 \cos x$	**40**	$\tanh x$
7	$\ln(1+x)$	**24**	$x^3 e^{-x}$	**41**	$\sin x/x$
8	$\ln(1-x)$	**25**	$e^x \sin x$	**42**	$(e^x-1)/x$
9	$\arctan x$	**26**	$e^x \cos x$	**43**	$\ln(1+x)/x$
10	$\arcsin x$	**27**	$e^{-x} \sin x$	**44**	$\arctan x/x$
11	$\sqrt{1+x}$	**28**	$e^{-x} \cos x$	**45**	$\sinh x/x$
12	$\sqrt{1-x}$	**29**	$\ln(1+x^2)$	**46**	$x \ln(1+x)$
13	$1/(1-x)$	**30**	$\ln(1-x^2)$	**47**	$x^2 \ln(1+x)$
14	$1/(1+x)$	**31**	$\arctan(x^2)$	**48**	$x \arctan x$
15	$1/(1-x)^2$	**32**	$\sin(x^2)$	**49**	$\sin(\sqrt{x})/\sqrt{x}$
16	$1/\sqrt{1-x^2}$	**33**	$\cos(x^2)$	**50**	$\sqrt{1+x^2}$
17	$1/(1+x^2)$	**34**	$x/(1-x)$	**51**	$e^x/(1-x)$