Задания. Интегральное исчисление в Maple

Задание 1. Неопределённый интеграл.

Для функции $f(x)$ из таблицы 1:

1. Найдите первообразную $F(x) = \int f(x)\,dx$ командой `int(f, x)`.
2. Проверьте результат дифференцированием: `simplify(diff(F, x) - f)`. Результат должен быть равен 0.
3. Постройте на одном графике функцию $f(x)$ и семейство первообразных $F(x) + C$ при $C = -1, 0, 1$ на отрезке $[a, b]$.
4. Отметьте точку x_0 маркером и убедитесь, что $F'(x_0) = f(x_0)$.
5. Запишите окончательный ответ, добавив постоянную интегрирования C вручную: команда `int` возвращает только одну первообразную $F(x)$ без произвольной постоянной, поэтому её нужно дописать самостоятельно:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Точки a, b, x_0 задайте самостоятельно.

Таблица 1. Функции для задания 1

№	$f(x)$	№	$f(x)$	№	$f(x)$
1	$x^2 \ln x$	**18**	$x^3 e^x$	**35**	$x^2/(x^2+4)$
2	$x \sin x$	**19**	$e^x \sin x$	**36**	$\ln x / x$
3	$x \cos x$	**20**	$e^x \cos x$	**37**	$1/(x \ln x)$
4	xe^x	**21**	$e^{-x} \sin x$	**38**	$x^{-3/2}$
5	$x^2 e^x$	**22**	$e^{-x} \cos x$	**39**	$\sqrt{x}$
6	$x^3 \ln x$	**23**	$\sqrt{x} \ln x$	**40**	$1/\sqrt{1-x^2}$
7	$x^2 \sin x$	**24**	$\sin x \cos x$	**41**	$1/(1-x^2)$
8	$x^2 \cos x$	**25**	$\sin^2 x$	**42**	$\sin(\ln x)$
9	$x^3 \sin x$	**26**	$\cos^2 x$	**43**	$\cos(\ln x)$
10	$x^3 \cos x$	**27**	$\tan^2 x$	**44**	$x^3 e^{2x}$
11	$x \ln x$	**28**	$1/(1+x^2)$	**45**	$x^3 e^{-2x}$
12	$x^2 e^{-2x}$	**29**	$1/(x^2+4)$	**46**	$x^2 \ln^2 x$
13	$x^3 e^{-x}$	**30**	$x/(1+x^2)$	**47**	$x \sin^2 x$
14	$x^4 \ln x$	**31**	$x^2/(1+x^2)$	**48**	$x \cos^2 x$
15	$x^4 e^x$	**32**	$1/(x^2-1)$	**49**	$e^{2x} \sin x$
16	xe^{-x}	**33**	$1/(x^2+3x+2)$	**50**	$e^{2x} \cos x$
17	$x^2 e^{-x}$	**34**	$(x+1)/(x^2+1)$	**51**	$x^2\sqrt{x+1}$

Задание 2. Определённый интеграл.

Для той же функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1. Вычислите точное значение

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

командой `int(f, x = a..b)`.

2. Найдите численное значение командой `evalf`.

3. Проверьте формулу Ньютона — Лейбница: сравните полученный результат с `F(b)-F(a)`, где F — первообразная из задания 1.

4. Постройте график $f(x)$ на $[a, b]$ и закрасьте криволинейную трапецию, используя `filled=true`.

Задание 3. Инертная форма `Int` и команда `value`.

1. С помощью `Int` отобразите неопределённый интеграл $\int f(x)\,dx$ без вычисления, затем вычислите его командой `value`. Сравните результат с `int(f, x)`.

2. Для определённого интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

отобразите инертную форму `Int(f, x = a..b)`, вычислите её командой `value` и найдите численное значение командой `evalf`.

Задание 4. Несобственные интегралы.

Для варианта из таблицы 2 выполните:

1. Вычислите интеграл командой `int`.

2. Если Maple возвращает `infinity` или невычисленную форму, сделайте вывод о расходимости интеграла.

3. Для сходящегося интеграла первого рода проверьте результат через предел: `limit(int(f, x = a..b), b = infinity)`.

4. Для несобственного интеграла второго рода проверьте предел при подходе к точке разрыва.

5. Постройте график подынтегральной функции; если интеграл сходится, закрасьте соответствующую область.

Таблица 2. Несобственные интегралы для задания 4

№	Интеграл	№	Интеграл	№	Интеграл
1	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$	**18**	$\int_0^\infty \cos x\,dx$	**35**	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$
2	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$	**19**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	**36**	$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}\,dx$
3	$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$	**20**	$\int_0^1 \frac{dx}{x}$	**37**	$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$
4	$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$	**21**	$\int_0^1 \ln x\,dx$	**38**	$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$
5	$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$	**22**	$\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$	**39**	$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$
6	$\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$	**23**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$	**40**	$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$
7	$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$	**24**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	**41**	$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
8	$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$	**25**	$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$	**42**	$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$
9	$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$	**26**	$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$	**43**	$\int_0^1 \frac{\ln x}{x}\,dx$
10	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+1}$	**27**	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.9}}$	**44**	$\int_0^1 \ln^2 x\,dx$
11	$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$	**28**	$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1.1}}$	**45**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$
12	$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$	**29**	$\int_0^1 \ln(1/x)\,dx$	**46**	$\int_0^1 \frac{dx}{x\ln x}$
13	$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$	**30**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$	**47**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14	$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$	**31**	$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln x}$	**48**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$
15	$\int_0^\infty e^{-2x}\sin x\,dx$	**32**	$\int_1^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$	**49**	$\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx$
16	$\int_0^\infty e^{-x}\cos x\,dx$	**33**	$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2-1}$	**50**	$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x}$
17	$\int_0^\infty \sin x\,dx$	**34**	$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$	**51**	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

Задание 5. Приложения определённого интеграла.

Для функции $y = f(x)$ из таблицы 1 на отрезке $[a, b]$:

1. Вычислите площадь криволинейной трапеции: $S = \int_a^b f(x)\,dx$.

2. Вычислите длину дуги: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$.

3. Вычислите объём тела вращения вокруг оси Ox: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

4. Постройте график функции и тело вращения, используя `plot3d` или `implicitplot3d`.