Задания. Символьное дифференцирование в Maple

Задание 1. Найдите первую, вторую и пятую производные функции $f(x)$ из таблицы 1. Вычислите значение первой производной в заданной точке x_0. Постройте на одном графике функцию $f(x)$ и её первую производную $f'(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$, выделив точку x_0 маркером. Убедитесь, что найденное значение производной соответствует наклону касательной к графику функции в этой точке.

Таблица 1. Функции для задания 1

№	Функция $f(x)$	№	Функция $f(x)$	№	Функция $f(x)$
1	$f(x) = x^2 \ln x$	18	$f(x) = x^2 e^{-x}$	35	$f(x) = (x+1)/(x^2+1)$
2	$f(x) = x \sin x$	19	$f(x) = x^3 e^x$	36	$f(x) = x^2/(x^2+1)$
3	$f(x) = x \cos x$	20	$f(x) = e^x \sin x$	37	$f(x) = \ln x/x$
4	$f(x) = x \tan x$	21	$f(x) = e^x \cos x$	38	$f(x) = e^x/x$
5	$f(x) = xe^x$	22	$f(x) = e^{-x} \sin x$	39	$f(x) = \sin x/x$
6	$f(x) = x^2 e^x$	23	$f(x) = e^{-x} \cos x$	40	$f(x) = \cos x/x$
7	$f(x) = x^3 \ln x$	24	$f(x) = \ln x \cdot \sin x$	41	$f(x) = \tan x/x$
8	$f(x) = x^2 \sin x$	25	$f(x) = \ln x \cdot \cos x$	42	$f(x) = x/\ln x$
9	$f(x) = x^2 \cos x$	26	$f(x) = \sqrt{x} \ln x$	43	$f(x) = x^2/\ln x$
10	$f(x) = x^3 \sin x$	27	$f(x) = \sqrt{x}\, e^x$	44	$f(x) = \ln x/x^2$
11	$f(x) = x^3 \cos x$	28	$f(x) = \sqrt{x} \sin x$	45	$f(x) = e^x/x^2$
12	$f(x) = x \ln x$	29	$f(x) = \sqrt{x} \cos x$	46	$f(x) = \sin x/x^2$
13	$f(x) = x^2 \tan x$	30	$f(x) = \sin x \cdot \cos x$	47	$f(x) = \cos x/x^2$
14	$f(x) = x^3 e^{-x}$	31	$f(x) = \sin x \cdot \tan x$	48	$f(x) = \tan x/x^2$
15	$f(x) = x^4 \ln x$	32	$f(x) = \cos x \cdot \tan x$	49	$f(x) = 1/(x \ln x)$
16	$f(x) = x^4 e^x$	33	$f(x) = \ln x \cdot e^x$	50	$f(x) = 1/(xe^x)$
17	$f(x) = xe^{-x}$	34	$f(x) = \ln x \cdot e^{-x}$	51	$f(x) = 1/(x \sin x)$

Функция для дифференцирования представлена в таблице 2. Точку (x_0) задайте самостоятельно.

Задание 2. Для функции двух переменных $f(x, y)$ найдите:

- частную производную по x;
- частную производную по y;
- смешанную производную $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Функции для дифференцирования сформируйте из таблицы 1, заменив x на y поочерёдно в каждом из двух сомножителей.

Задание 3. Оператор дифференцирования `D`

1. Задайте функцию f оператором стрелка:

$$f := x \to f(x).$$

Найдите $f'(x)$ с помощью `D(f)` и вычислите её значение в заданных точках x_1, x_2, x_3. Сравните результаты, полученные командами `diff` и `D`, для функции $f(x)$.

2. Для функции $f(x)$ найдите вторую производную `(D@@2)(f)` и вычислите её значение в заданной точке $x = x_0$.

3. Для функции двух переменных $f(x, y)$ найдите частные производные `D[1](f)` и `D[2](f)`. Вычислите их значения в заданной точке (x_0, y_0).

Функции для дифференцирования возьмите из предыдущего задания. Точки x_k задайте самостоятельно.

Задание 4. Инертная форма `Diff` и команда `value`

1. С помощью `Diff` отобразите производную 4-го порядка функции $f(x)$ без вычисления, затем вычислите её командой `value`. Полученный результат упростите командой `simplify` и сравните с результатом, полученным командой `diff(f, x$4)`.

2. Используя `Diff` и `value`, найдите смешанную производную

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\big(f(x, y)\big).$$

Функции для дифференцирования возьмите из предыдущего задания.

Задание 5. Дифференцирование неявных функций `implicitdiff`

Пусть $F(x, y) = 0$ задаёт y как неявную функцию от x. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

при условии $F'_y \neq 0$. Вторую производную неявной функции $F(x, y) = 0$ можно вычислить по формуле:

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}\, y' + F''_{yy}\,(y')^2}{F'_y}$$

при условии $F'_y \neq 0$, где $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$.

Для уравнения $F(x, y) = 0$:

1. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ с помощью команды `implicitdiff(F, y, x)`.

2. Найдите $\dfrac{dy}{dx}$ по формуле $y' = -\dfrac{F'_x}{F'_y}$, вычислив частные производные F'_x и F'_y командой `diff`. Сравните результат с п. 1.

3. Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ с помощью команды `implicitdiff(F, y, x, x)`. Упростите результат командой `simplify`.

4. Найдите $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, используя формулу:

$$y'' = -\frac{F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}(y')^2}{F'_y},$$

подставив в неё выражения для частных производных функции $F(x, y)$ и найденное в п. 2 выражение для y'. Сравните результат с п. 3.

Функции для дифференцирования представлены в таблице 2. Точку (x_0, y_0) задайте самостоятельно.

Таблица 2. Неявные функции для задания 5

№	Уравнение $F(x,y)=0$	№	Уравнение $F(x,y)=0$	№	Уравнение $F(x,y)=0$
1	$x^2+y^2=\sin x$	**18**	$x^3+y^3=\ln(xy)$	**35**	$e^y+xy=\sin x$
2	$x^2+y^2=\cos x$	**19**	$x^3+y^3=\ln x\cdot\ln y$	**36**	$e^y-xy=\cos x$
3	$y^2=4x\sin x$	**20**	$x^3-y^3=\ln(x+y)$	**37**	$e^y+xy=\ln x$
4	$x^2-y^2=\cos^2 x$	**21**	$x^3+y^3=\ln^2(xy)$	**38**	$e^{xy}=x+\sin y$
5	$xy=\sin^2 x$	**22**	$x^3+y^3=\ln^3(xy)$	**39**	$e^{x+y}=xy+\cos x$
6	$x^2+y^2=2x\sin y$	**23**	$x^3+y^3=3x^2y\ln x$	**40**	$\ln y+xy=\sin x$
7	$x^2+y^2=2y\cos x$	**24**	$x^3+y^3=3xy^2\ln y$	**41**	$\ln y-xy=\cos x$
8	$x^2+y^2=4x\sin^2 y$	**25**	$x^4+y^4=\sin(xy)$	**42**	$\ln(x+y)=x-\sin y$
9	$x^2+y^2=4y\cos^2 x$	**26**	$x^4+y^4=\cos(xy)$	**43**	$\ln(xy)=x+\cos y$
10	$x^2+y^2+xy=\sin(x+y)$	**27**	$x^4+y^4=\sin^2(xy)$	**44**	$\ln(xy)=x-\sin y$
11	$x^2+y^2-xy=\cos(x-y)$	**28**	$x^4-y^4=\cos^2(xy)$	**45**	$\ln(x^2+y^2)=\sin(xy)$
12	$x^2+xy+y^2=\sin x\cdot\cos y$	**29**	$x^4-y^4=\ln(xy)$	**46**	$\sin(xy)=x+\ln y$
13	$x^2-xy+y^2=\cos x\cdot\sin y$	**30**	$x^2y+xy^2=\ln^2 x$	**47**	$\cos(xy)=x-\ln y$
14	$x^2+xy+y^2=\ln(x+y)$	**31**	$x^2y-xy^2=\ln^2 y$	**48**	$\tan(xy)=x+\sin x$
15	$x^2-xy+y^2=\ln(x-y)$	**32**	$x^3y+xy^3=\ln^3 x$	**49**	$\sin x+\sin y=\ln(xy)$
16	$x^2/9+y^2/4=\sin x$	**33**	$x^3y-xy^3=\ln^3 y$	**50**	$\cos x+\cos y=\ln(x+y)$
17	$x^2/4-y^2/9=\cos y$	**34**	$x^2y^2+xy=\ln(xy)$	**51**	$\tan x+\tan y=\ln(x-y)$