Контрольные задания по теме «Интегральное исчисление в Maple»

Все задания (кроме п. 3) выполняются для функции

$$f(x) = x^2 \ln x$$

на отрезке $[a, b] = [1, 2]$. Точку $x_0 \in [a, b]$ задайте самостоятельно.

Задание 1. Неопределённый интеграл.

1. Найдите первообразную $F(x) = \int f(x)\,dx$ командой `int(f, x)`.
2. Проверьте результат дифференцированием: `simplify(diff(F, x) - f)`. Результат должен быть равен 0.
3. Постройте на одном графике функцию $f(x)$ и семейство первообразных $F(x) + C$ при $C = -1, 0, 1$ на отрезке $[a, b]$.
4. Отметьте точку x_0 маркером и убедитесь, что $F'(x_0) = f(x_0)$.
5. Запишите окончательный ответ, добавив постоянную интегрирования C вручную: команда `int` возвращает только одну первообразную $F(x)$ без произвольной постоянной, поэтому её нужно дописать самостоятельно:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Задание 2. Определённый интеграл.

1. Вычислите точное значение $\int_a^b f(x)\,dx$ командой `int(f, x = a..b)`.
2. Найдите численное значение командой `evalf`.
3. Проверьте формулу Ньютона — Лейбница: сравните полученный результат с `F(b)-F(a)`, где F — первообразная из задания 1.
4. Постройте график $f(x)$ на $[a, b]$ и закрасьте криволинейную трапецию, используя `filled=true`.

Задание 3. Несобственные интегралы.

Рассмотрите два интеграла:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_0^1 x^2 \ln x\,dx.$$

Первый является несобственным интегралом первого рода (бесконечный промежуток интегрирования), второй — второго рода (подынтегральная функция не ограничена при $x \to 0$). Выполните:

1. Вычислите первый интеграл командой `int(ln(x)/x^2, x = 1..infinity)`.
2. Вычислите второй интеграл командой `int(x^2*ln(x), x = 0..1)`.
3. Если Maple возвращает `infinity` или невычисленную форму, сделайте вывод о расходимости интеграла.
4. Для интеграла первого рода проверьте результат через предел: `limit(int(ln(x)/x^2, x = 1..b), b = infinity)`.
5. Для интеграла второго рода проверьте предел при подходе к точке разрыва: `limit(int(x^2*ln(x), x = eps..1), eps = 0, right)`.
6. Постройте графики подынтегральных функций; для сходящихся интегралов закрасьте соответствующие области.

Задание 4. Приложения определённого интеграла.
Для функции $y = f(x) = x^2 \ln x$ на отрезке $[a, b] = [1, 2]$:

1. Вычислите площадь криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Вычислите длину дуги:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

3. Вычислите объём тела вращения вокруг оси Ox:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

4. Постройте график функции и тело вращения, используя `plot3d` или `implicitplot3d`.