РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

О. В. БАБУРОВА

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

RELATIVISTIC KINEMATICS AND LOBACHEVSKI GEOMETRY

O. V. BABOUROVA

The connection between Special Relativity and Lobachevski geometry has been established in early papers on relativistic physics. In this article the basic aspects of the Special Relativity kinematics are presented and the geometric model of the velocity space of relativistic physics is considered. It is shown that the velocity space has Lobachevski geometry. The application of Lobachevski geometry to the investigation of particle decays in high energy physics is considered.

Уже в ранних работах по релятивистской физике была замечена связь между специальной теорией относительности и геометрией Лобачевского. В статье изложены основные аспекты кинематики специальной теории относительности и рассмотрена геометрическая модель пространства скоростей релятивистской физики. Показано, что пространство скоростей релятивистской физики обладает геометрией Лобачевского. Рассмотрено применение геометрии Лобачевского для расчета распада частиц в физике высоких энергий.

journal.issep.rssi.ru

© Бабурова О.В., 2004

1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Специальная теория относительности – это основа физики больших скоростей. Этот раздел физики возник в начале XX в. и связан с именами таких выдающихся ученых, как голландский физик Хендрик Лоренц, французский математик Анри Пуанкаре, немецкий физик Альберт Эйнштейн.

При изучении электромагнитных явлений физики столкнулись с тем фактом, что механика Галилея–Ньютона хорошо согласуется лишь с теми экспериментами, в которых имеют место движения с небольшими скоростями. При движениях со скоростями, близкими к скорости света в вакууме, предсказания классической механики заметно отличаются от экспериментальных фактов. Так, например, согласно закону сложения скоростей, вытекающему из преобразований Галилея, если скорость света в некоторой системе отсчета равна c, то в системе отсчета, движущейся относительно первой системы в том же или обратном направлениях со скоростью $\vec{V}$, – соответственно $c + V$ и $c - V$. Но, как показывает эксперимент, скорость света одна и та же во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно, то есть в инерциальных системах отсчета (ИСО). Этот факт стал основополагающим принципом (постулатом) новой релятивистской механики – специальной теории относительности (СТО). Вторым постулатом СТО стал всеобщий принцип относительности Пуанкаре–Эйнштейна, суть которого заключается в том, что любой из физических законов может быть описан одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Известно, что в классической механике связь между координатами движущейся материальной точки относительно разных инерциальных систем отсчета осуществляется с помощью преобразований Галилея, которые в случае одномерного движения имеют вид

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Здесь координаты и время x, y, z, t относятся к некоторой инерциальной системе ИСО1, а координаты и время x', y', z', t' – к другой инерциальной системе ИСО2, движущейся относительно первой прямолинейно и равномерно вдоль оси x со скоростью $\vec{V}$.

В специальной теории относительности связь между координатами точки, определяемыми в ИСО1 и ИСО2, более сложная и содержится в преобразованиях, которые в случае одномерного движения имеют вид [1]

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (1)$$

Эти преобразования были открыты уже в 1898 г. английским физиком Дж. Лармором, а еще раньше, в 1887 г., аналогичные преобразования нашел немецкий физик Фогт [2]. Затем независимо преобразования (1) были переоткрыты одним из создателей СТО, Г.А. Лоренцем, и по предложению Пуанкаре в 1905 г. были названы преобразованиями Лоренца [3].

2. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ МИР МИНКОВСКОГО

В основе СТО лежит инвариантность законов физики относительно преобразований Лоренца. Однако сущность СТО оказалась более глубокой. Уже Пуанкаре в своей работе 1905 г. показал, что преобразования Лоренца представляют собой повороты в четырехмерном пространстве с осями x, y, z, ct, оставляющие инвариантной величину

$$s^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2(t - t_0)^2, \qquad (2)$$

составленную из разностей координат двух точек пространства $M(x, y, z)$ и $M(x_0, y_0, z_0)$, в которых происходят некоторые события в моменты времени t и t_0 соответственно.

Позднее, в 1907 г., немецкий математик Герман Минковский переоткрыл эту идею и придал ей фундаментальное значение (см. [3]). Он пришел к выводу, что реально не существует отдельно пространства и отдельно времени, а реально существует только единое четырехмерное пространство–время, названное им абсолютным миром. Точка пространства–времени с координатами x, y, z, ct называется событием, а расстояние s между событиями в пространстве–времени определяется на основании формулы (2) и называется интервалом между событиями. Пространство с такой функцией расстояния s (точнее, псевдорасстояния) носит название пространства Минковского или псевдоевклидова пространства [4]. Функция расстояния (2) разбивает множество всех интервалов между событиями пространства–времени на три типа: времениподобные интервалы, для которых имеет место $s^2 < 0$; пространственноподобные интервалы, для которых $s^2 > 0$; и светоподобные (или изотропные) интервалы, для которых $s^2 = 0$. Множество всех событий с координатами x, y, z, ct, удовлетворяющих условию $s^2 = 0$, называется световым конусом события (x_0, y_0, z_0, ct_0).

По отношению к событию с координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $ct_0 = 0$, выбранному в качестве начала координат, все события пространства–времени находятся в одной из трех областей (рис. 1): в абсолютном будущем, состоящем из событий, находящихся внутри верхней полости светового конуса начала координат (и на самом полуконусе); в абсолютном прошлом, состоящем из событий, находящихся внутри нижней полости светового конуса начала координат (и на самом полуконусе); и в остальной области пространства–времени, состоящей из событий, соединенных пространственноподобным интервалом с началом координат.

Данная классификация областей пространства–времени основана на установленном в СТО фундаментальном физическом законе, заключающемся в том, что все физические взаимодействия могут распространяться со скоростью, не превышающей скорости света в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с. Поэтому событие, произошедшее в начале координат в момент времени $t_0 = 0$, может причинно повлиять только на события, лежащие внутри области абсолютного будущего начала координат. Аналогично на событие, произошедшее в начале координат в момент времени $t_0 = 0$, могли причинно повлиять только события, лежащие внутри области абсолютного прошлого начала координат. Что же касается событий, лежащих вне светового конуса начала координат и соединенных пространственноподобным интервалом, то эти события никак не могут быть причинно связанными между собой, иначе

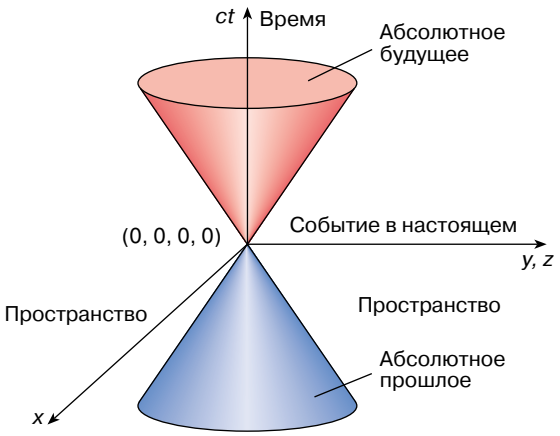


Рис. 1

причинное взаимодействие распространялось бы со скоростью, превышающей скорость света.

В трехмерном псевдоевклидовом пространстве могут быть построены три вида сфер с центром в начале координат: сферы действительного радиуса, сфера нулевого радиуса, представляющая собой световой конус начала координат, и сферы мнимого радиуса. Последние определяются как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют (при различных R) условию: $x^2 + y^2 - (ct)^2 = (iR)^2$, где i – мнимая единица. Сфера мнимого радиуса представляет собой двуполостный гиперболоид, обе полости которого расположены внутри светового конуса начала координат (рис. 2).

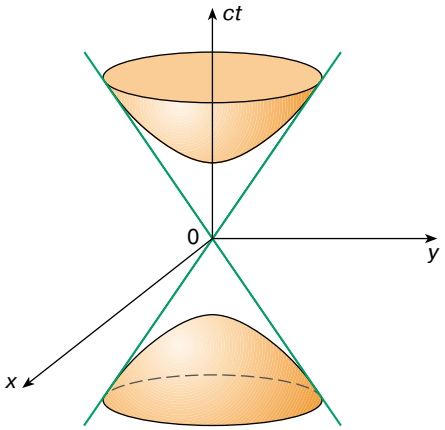


Рис. 2

Приведенная классификация легко обобщается на четырехмерное псевдоевклидово пространство. Сфера мнимого радиуса в этом случае переходит в гиперсферу мнимого радиуса, описываемую уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = -R^2. \qquad (3)$$

Она представляет собой трехмерную гиперповерхность, то есть трехмерный объем в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве.

3. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

В 1826 г. русский математик Н.И. Лобачевский сделал доклад на физико-математическом факультете Казанского университета, в котором изложил геометрическую систему, отличную от геометрии Евклида. Открытие неевклидовой геометрии явилось одним из величайших открытий в истории точных наук.

Уже в трудах самого Лобачевского было установлено, что геометрия плоскости Лобачевского совпадает с геометрией на сфере мнимого радиуса [5], то есть на сфере радиуса iR, где R – константа плоскости Лобачевского, устанавливающая масштаб в данной геометрии. Эту идею в дальнейшем независимо развил Э. Бельтрами, который установил, что область плоскости Лобачевского может быть реализована на поверхности постоянной отрицательной кривизны, если принять за прямые плоскости Лобачевского геодезические (экстремальные) линии поверхности постоянной отрицательной кривизны, а за длины и углы плоскости Лобачевского – углы и длины на этой поверхности [4].

Эта модель плоскости Лобачевского установлена Бельтрами путем проектирования сферы мнимого радиуса из ее центра O на внутренность круга евклидовой плоскости Π (рис. 3). Точки плоскости Лобачевского характеризуются координатами Бельтрами $(x_Б, y_Б)$, которые связаны с координатами x, y, z соответствующих точек сферы мнимого радиуса:

$$x_Б = \frac{x}{z}, \qquad y_Б = \frac{y}{z}. \qquad (4)$$

При этом диаметрально противоположные точки сферы отождествляются и соответствуют одной точке плоскости Лобачевского. Если координаты Бельтрами рассматривать как декартовы координаты на евклидовой плоскости Π, то очевидно, что при отображении Бельтрами плоскость Лобачевского отразится на внутренность евклидова круга $x_Б^2 + y_Б^2 < R^2$. Это вытекает из условия (3), которому удовлетворяют координаты сферы мнимого радиуса. Данное отображение плоскости Лобачевского на евклидов круг показывает, что в малом плоскость Лобачевского устроена так же, как евклидова плоскость. Внутренность евклидова круга реализуется как плоскость Лобачевского путем переопределения расстояния между его точками.

За расстояние между точками плоскости Лобачевского принимается расстояние ρ между точками (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) сферы мнимого радиуса в псевдоевклидовом пространстве, измеренное по большой окружности этой сферы и определяемое по формуле

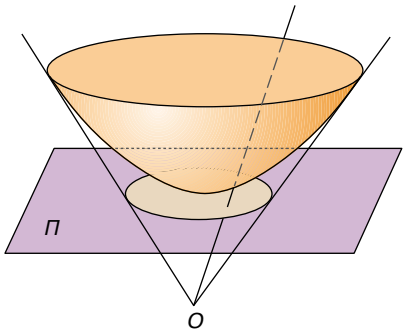


Рис. 3

$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{R} = -\frac{1}{R}(x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2). \qquad (5)$$

Отображение Бельтрами дает соотношения между расстоянием ρ от данной точки до начала координат на плоскости Лобачевского и расстоянием r от начала координат до образа этой точки на евклидовой плоскости, на которую осуществляется проектирование [4]:

$$r = R\operatorname{th}\frac{\rho}{R}. \qquad (6)$$

Интерпретация плоскости Лобачевского в виде сферы мнимого радиуса позволяет вывести все тригонометрические соотношения в геометрии Лобачевского, такие, как гиперболический аналог теоремы Пифагора, формулы решения прямоугольного треугольника [5], теоремы косинусов и синусов [4]. В частности, длина L окружности и площадь круга Σ радиуса ρ на плоскости Лобачевского определяются формулами

$$L(\rho) = 2\pi R\operatorname{sh}\frac{\rho}{R}, \qquad \Sigma(\rho) = 2\pi R^2\left(\operatorname{ch}\frac{\rho}{R} - 1\right). \qquad (7)$$

Для треугольника с углами α, β, γ, лежащими против сторон a, b, c, выводится теорема косинусов

$$\operatorname{ch}\frac{a}{R} = \operatorname{ch}\frac{b}{R}\operatorname{ch}\frac{c}{R} - \operatorname{sh}\frac{b}{R}\operatorname{sh}\frac{c}{R}\cos\alpha, \qquad (8)$$

а также двойственная теорема косинусов

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\operatorname{sh}\frac{a}{R}. \qquad (9)$$

Из теоремы косинусов (8) и формулы (7) выводится теорема синусов:

$$\frac{L(a)}{\sin\alpha} = \frac{L(b)}{\sin\beta} = \frac{L(c)}{\sin\gamma}. \qquad (10)$$

Формула (10) носит название формулы Больяи.

Для дальнейшего понадобится также формула для площади треугольника в планиметрии Лобачевского

$$S = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)R^2. \qquad (11)$$

Приведенные рассуждения обобщаются на пространство четырех измерений. В этом случае с помощью отображения Бельтрами можно показать, что аксиомы трехмерного пространства Лобачевского будут выполняться на каждой из полостей гиперсферы мнимого радиуса (3) четырехмерного псевдоевклидова пространства.

4. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

Уже в ранних работах по релятивистской физике была замечена связь между СТО и геометрией Лобачевского. В частности, релятивистский закон сложения скоростей был интерпретирован А. Зоммерфельдом с использованием формул гиперболической тригонометрии. В 1923 г. А.П. Котельников ввел понятие пространства скоростей релятивистской кинематики и установил его связь с пространством Лобачевского. Затем пространство скоростей изучал В.А. Фок [1]. Это перспективное направление релятивистской физики было вновь возрождено Н.А. Черниковым [6–8].

В механике скорость материальной точки направлена по прямой, касательной к ее траектории, причем

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad \upsilon_y(t) = \frac{dy}{dt}, \qquad \upsilon_z(t) = \frac{dz}{dt}.$$

Пусть материальная точка движется под углом γ к оси x, тогда модуль скорости $\vec{\upsilon}$ точки связан с ее проекцией υ_x на ось x:

$$\upsilon_x = \upsilon\cos\gamma, \qquad \upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2. \qquad (12)$$

Связь между проекциями скорости частицы в ИСО1 и ИСО2 можно получить продифференцировав (1) по времени. Эта связь имеет вид

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon'_{y,z} = \upsilon_{y,z}\frac{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{\upsilon_x V}{c^2}}. \qquad (13)$$

На основании (12), (13) можно получить выражение для абсолютной величины скорости [1]

$$|\upsilon'| = \frac{\sqrt{(\vec{\upsilon} - \vec{V})^2 - \dfrac{1}{c_2}[\vec{\upsilon}, \vec{V}]^2}}{1 - \dfrac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{V}}{c^2}}, \qquad (14)$$

где через $[\cdot, \cdot]$ обозначено векторное произведение векторов $\vec{\upsilon}$ и $\vec{V}$. Возводя формулу (14) в квадрат и раскрыв скалярное и векторное произведения, получим

$$\left(\frac{\upsilon'}{c}\right)^2 = \frac{\left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{V}{c}\right)^2 - 2\dfrac{\upsilon V}{c^2}\cos\gamma - \left(\dfrac{\upsilon}{c}\right)^2\left(\dfrac{V}{c}\right)^2\sin^2\gamma}{\left(1 - \dfrac{\upsilon V}{c^2}\cos\gamma\right)^2}. \qquad (15)$$

Эта формула показывает, что правило сложения скоростей в СТО более сложное, чем правило параллелограмма для сложения скоростей в нерелятивистской механике Ньютона $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V}$.

Рассмотрим теперь две материальные точки, движущиеся относительно системы ИСО1 с бесконечно близкими скоростями $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$. Скорость системы ИСО2 выберем совпадающей со скоростью первой

материальной точки. Тогда для скорости $\vec{\upsilon}_{от}$ движения второй точки относительно первой из формулы (14), заменяя в ней $\vec{\upsilon}' \longrightarrow \vec{\upsilon}_{от}$, $\vec{V} \longrightarrow \vec{\upsilon}$, $\vec{\upsilon} \longrightarrow \vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon}$, получим

$$d\upsilon_{от}^2 = \frac{d\vec{\upsilon}^2 - \frac{1}{c^2}[\vec{\upsilon}, d\vec{\upsilon}]^2}{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^2}. \qquad (16)$$

Выражение (16) представляет собой квадрат элемента длины в некотором пространстве скоростей. Введенный таким образом элемент длины во множестве всех равномерных движений предполагает отождествление всех движений с одной и той же по величине и направлению скоростью, так как элемент длины (16) между двумя такими движениями равен нулю. В построенном таким образом пространстве скоростей релятивистской кинематики точкой является совокупность всех равномерных движений с равной нулю относительной скоростью [9]. Определим в пространстве скоростей расстояние между точками, находящимися на конечном расстоянии друг от друга.

Каждому классу равномерных движений в трехмерном пространстве скоростей отвечает прямая линия в четырехмерном пространстве Минковского, вдоль которой направлен вектор $\bar{u}$ четырехмерной скорости с координатами

$$u^1 = \frac{\upsilon_x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad u^2 = \frac{\upsilon_y}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad u^3 = \frac{\upsilon_z}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad u^4 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (17)$$

Вектор $\bar{u}$ времениподобен и имеет постоянный модуль. Его компоненты удовлетворяют условию

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 - (u^4)^2 = -(c)^2. \qquad (18)$$

Это уравнение является уравнением двуполостного гиперболоида в четырехмерном пространстве Минковского с координатами u^1, u^2, u^3, u^4. Таким образом, множество, состоящее из точек концов векторов всех скоростей $\bar{u}$, исходящих из начала координат в пространстве Минковского, представляет собой верхнюю полость двуполостного гиперболоида (18) (рис. 4).

Как описано в предыдущем разделе, на верхней полости гиперболоида (18) реализуется геометрия Лобачевского, роль постоянной R которой играет скорость света c. За расстояние между точками пространства скоростей принимается расстояние ω между двумя точками гиперболоида, определяемое по формуле, аналогичной формуле (5).

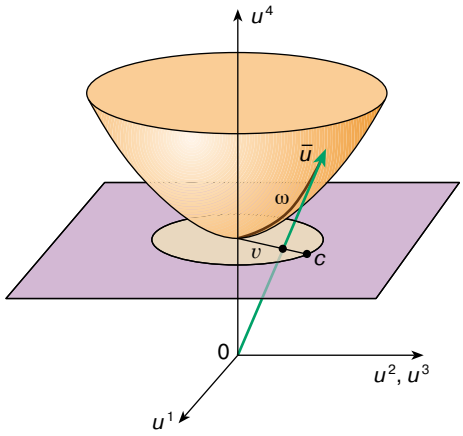


Рис. 4

Координатами Бельтрами в этом случае, согласно (4) и (17), будут как раз компоненты трехмерной скорости:

$$\frac{\upsilon_x}{c} = \frac{u^1}{u^4}, \quad \frac{\upsilon_y}{c} = \frac{u^2}{u^4}, \quad \frac{\upsilon_z}{c} = \frac{u^3}{u^4}. \qquad (19)$$

Величина ω называется быстротой [6–8]. Формула (6) дает в данном случае связь между модулем вектора $\vec{\upsilon}$ трехмерной скорости и быстротой, соответствующей в пространстве скоростей расстоянию от начала координат до конца этого вектора (см. рис. 4):

$$\frac{\upsilon}{c} = \operatorname{th}\frac{\omega}{c}. \qquad (20)$$

С помощью подстановки (20) формула (16) для относительной скорости путем перехода к сферическим координатам

$$\vec{\upsilon} = \{\upsilon\sin\theta\cos\varphi, \upsilon\sin\theta\sin\varphi, \upsilon\cos\theta\}$$

может быть представлена в виде

$$ds_\upsilon^2 = d\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \operatorname{sh}^2\frac{\omega}{c}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Это выражение для элемента длины трехмерного пространства отрицательной кривизны, в котором справедлива геометрия Лобачевского.

Применим теперь к закону сложения скоростей (15) подстановку (20):

$$\frac{\upsilon'}{c} = \operatorname{th}\frac{\omega'}{c}, \quad \frac{\upsilon}{c} = \operatorname{th}\frac{\omega}{c}, \quad \frac{V}{c} = \operatorname{th}\frac{\Omega}{c}$$

и воспользуемся известной формулой гиперболической тригонометрии

$$\mathrm{ch}^2\frac{\omega'}{c} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2\frac{\omega'}{c}}.$$

После некоторых преобразований получаем формулу

$$\mathrm{ch}\frac{\omega'}{c} = \mathrm{ch}\frac{\omega}{c}\mathrm{ch}\frac{\Omega}{c} - \mathrm{sh}\frac{\omega}{c}\mathrm{sh}\frac{\Omega}{c}\cos\gamma.$$

Сравнивая ее с формулой (7), убеждаемся в том, что закон сложения скоростей в релятивистской кинематике есть не что иное, как теорема косинусов геометрии Лобачевского.

5. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ФИЗИКА ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Н.А. Черников [6, 7] показал, что формулы геометрии Лобачевского могут быть с успехом применены при проведении расчетов в физике частиц высоких энергий. В качестве примера рассмотрим задачу распада релятивистской элементарной частицы γ на две частицы γ_1 и γ_2. Пусть известны массы m_1, m_2 частиц распада и их скорости $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$, а требуется по этим данным определить массу m распавшейся частицы и ее скорость $\vec{\upsilon}$.

В этом процессе выполняется закон сохранения импульса частиц

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, \qquad (21)$$

где $\vec{p}$ – импульс исходной частицы, $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ – импульсы продуктов распада. В релятивистской механике импульсы рассматриваемых частиц через их массы и скорости выражаются следующим образом:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad \vec{p}_1 = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_1^2}{c^2}}}, \quad \vec{p}_2 = \frac{m_2\vec{\upsilon}_2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon_2^2}{c^2}}}. \qquad (22)$$

Нетрудно получить изящную формулу, связывающую модуль релятивистского импульса p с длиной окружности $L(\omega/c)$ в пространстве скоростей с радиусом, определяемым значением быстроты ω, соответствующим скорости частицы υ. Для этой цели в выражение для импульса (22) подставим формулу (20). Воспользовавшись формулами гиперболической тригонометрии [10], получим

$$\frac{p}{m} = \frac{c\,\mathrm{th}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{\omega}{c}}} = c\,\mathrm{sh}\frac{\omega}{c} = \frac{L}{2\pi}. \qquad (23)$$

Аналогичными вычислениями можно установить связь между кинетической энергией E_k релятивистской частицы, которая в СТО определяется формулой

$$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right),$$

и площадью круга в пространстве скоростей:

$$\frac{E_k}{m} = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2\frac{\omega}{c}}} - 1\right) = c^2\left(\mathrm{ch}\frac{\omega}{c} - 1\right) = \frac{\Sigma}{2\pi}.$$

В пространстве скоростей точки, соответствующие скоростям $\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2$, образуют треугольник в пространстве Лобачевского с вершинами $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$. Если перейти в систему отсчета, в которой покоится распавшаяся частица, то в этой системе отсчета $\vec{\upsilon} = 0$, $\vec{p} = 0$, $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$. Следовательно, в пространстве скоростей точка γ, соответствующая скорости $\vec{\upsilon} = 0$, будет находиться в начале координат, а точки γ_1 и γ_2, соответствующие скоростям $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, – по разные стороны от начала координат. В этом случае треугольник $\gamma\gamma_1\gamma_2$ в пространстве скоростей вырождается в отрезок прямой линии, проходящей через начало координат (рис. 5), причем, согласно разделу 3, расстояния между соответствующими точками пространства скоростей будут (рис. 6)

$$\gamma_1\gamma = \frac{\omega_1}{c}, \quad \gamma\gamma_2 = \frac{\omega_2}{c}, \quad \gamma_1\gamma_2 = \gamma_1\gamma + \gamma\gamma_2 = \frac{\omega}{c}. \qquad (24)$$

Для модулей импульсов в данном случае имеем $p_1 = p_2$. На основании (23) это равенство запишется как $m_1L_1 = m_2L_2$, где $L_1 = L(\omega_1/c)$, $L_2 = L(\omega_2/c)$.

Выберем теперь систему отсчета, в которой покоится одна из частиц распада, например частица γ_1. В этой системе отсчета $\vec{\upsilon}_1 = 0$, $\vec{p}_1 = 0$, $\vec{p} = \vec{p}_2$. В этом случае треугольник $\gamma\gamma_1\gamma_2$ в пространстве скоростей также вырождается в отрезок прямой линии, проходящей через начало координат. Начало координат в пространстве скоростей будет совпадать с точкой γ_1, соответствующей скорости $\vec{\upsilon}_1 = 0$, а точки γ и γ_2, соответствующие скоростям $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}_2$, будут находиться уже по одну сторону от начала координат. Расстояния между соответствующими точками пространства скоростей будут попрежнему удовлетворять равенствам (24), но при этом для частицы γ расстояние до начала координат $\gamma_1\gamma$ в

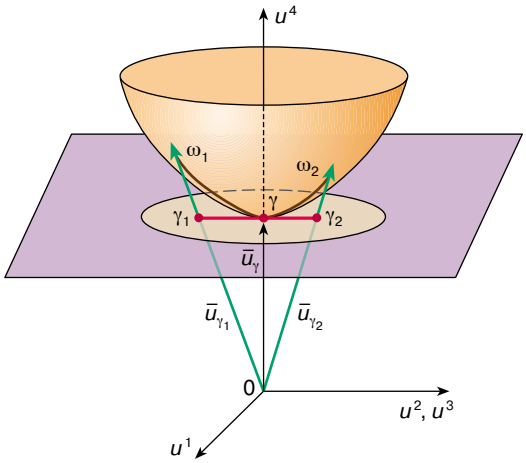


Рис. 5

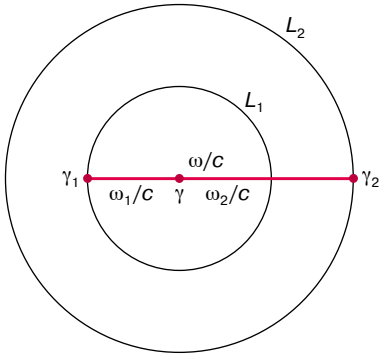


Рис. 6

пространстве скоростей равно $\frac{\omega_1}{c}$, а для частицы γ_2 расстояние до начала координат $\gamma_1\gamma_2$ в пространстве скоростей $\frac{\omega}{c}$ (рис. 7). Для модулей импульсов в данном случае имеем $p = p_2$. На основании (23) это равенство запишется как $mL_1 = m_2L$, где $L_1 = L(\omega_1/c)$, $L = L(\omega/c)$. Объединяя полученные равенства $m_1L_1 = m_2L_2$ и $mL_1 = m_2L$, приходим к соотношению

$$\frac{L_2}{m_1} = \frac{L_1}{m_2} = \frac{L}{m}. \tag{25}$$

Для того чтобы иметь возможность применить формулы геометрии Лобачевского, будем рассматривать отрезок $\gamma_1\gamma\gamma_2$ как предельный случай треугольника $\gamma_1\gamma\gamma_2$ (рис. 8), в котором углы α и β крайне малы, а угол γ практически равен π. Применим для этого треугольника теорему синусов в форме Больяи (10), в которой для

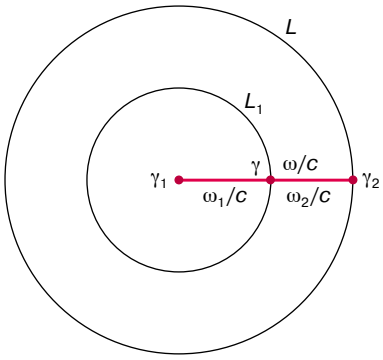


Рис. 7

сторон треугольника следует положить $a = \gamma\gamma_2 = \frac{\omega_2}{c}$, $b = \gamma_1\gamma = \frac{\omega_1}{c}$, $c = \gamma_1\gamma_2 = \frac{\omega}{c}$. Тогда для соответствующих длин окружностей будем иметь $L(a) = L_2$, $L(b) = L_1$, $L(c) = L$, и формула (10) приобретет вид

$$\frac{L_2}{\sin\alpha} = \frac{L_1}{\sin\beta} = \frac{L}{\sin\gamma}. \tag{26}$$

Учтем теперь, что углы α, β и $\pi - \gamma$ малы, то есть синусы этих углов примерно равны самим углам, выраженным в радианах. Тогда, сравнивая формулы (25) и (26), найдем (λ – малый параметр):

$$\begin{gathered}\alpha \approx \sin\alpha = \lambda m_1, \qquad \beta \approx \sin\beta = \lambda m_2, \\ \pi - \gamma \approx \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma = \lambda m.\end{gathered} \tag{27}$$

Применим теперь к треугольнику $\gamma_1\gamma\gamma_2$ теорему косинусов в форме (9) и учтем, что ввиду малости углов α и β справедливы формулы приближенных вычислений

$$\begin{gathered}\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2, \\ \cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} \approx 1 - \frac{1}{2}\beta^2, \\ \cos\gamma = -\cos(\pi - \gamma) = -1 + \frac{1}{2}(\pi - \gamma)^2.\end{gathered} \tag{28}$$

Подставляя равенства (28) с учетом (27) в формулу (9) и сохраняя только члены второго порядка малости по λ,

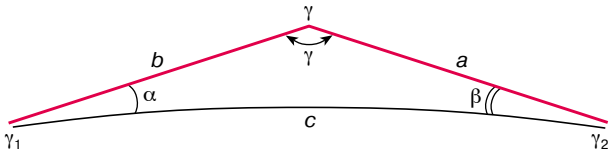


Рис. 8

получаем искомую формулу для массы распавшейся частицы

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2 \operatorname{ch}\frac{\omega}{c}. \qquad (29)$$

Быстрота ω, а следовательно, и искомая скорость частицы υ находятся при помощи формул (24) и (20), если известны скорости υ_1 и υ_2 частиц распада.

Согласно формуле (11), площадь треугольника $\gamma_1\gamma\gamma_2$ в пространстве скоростей $S = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)c^2$. В геометрии Лобачевского величина $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ называется дефектом углов треугольника. На основе (27) имеем $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \lambda(m - m_1 - m_2)$. В физике высоких энергий разность между массой распавшейся частицы и суммой масс частиц распада носит название дефекта масс: $\Delta m = m - m_1 - m_2$. Отсюда получаем $S = \lambda\Delta mc^2$. Таким образом, дефект масс в реакциях распада в физике высоких энергий определяется дефектом углов треугольника пространства скоростей, соответствующего реакции распада.

Дефект масс присущ только релятивистским частицам, то есть частицам, пространство скоростей которых обладает геометрией Лобачевского. К тому же пространство скоростей нерелятивистских частиц обладает евклидовой геометрией. Но в евклидовом треугольнике имеет место $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, поэтому дефект углов треугольника отсутствует. Поэтому в нерелятивистской механике Галилея–Ньютона отсутствует дефект масс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уже Н.И. Лобачевский сформулировал проблему о связи открытой им воображаемой геометрии с геометрией реального мира. Он пытался решить вопрос, какая из геометрий реализуется в физическом пространстве, если принять за прямые линии световые лучи и траектории инерциально движущихся тел. Лобачевский предполагал ответить на этот вопрос, производя измерения суммы углов треугольника, вершины которого находятся в противоположных точках земной орбиты и на одной из неподвижных звезд. Лобачевскому не удалось ответить на сформулированный им вопрос из-за того, что величина эффекта не выходила за пределы ошибок измерения. Только после создания общей теории относительности Эйнштейна было экспериментально доказано, что физическое пространство–время в действительности является неевклидовым.

Вместе с тем выяснилось, что геометрия Лобачевского является математической основой специальной теории относительности, а именно описывает геометрию пространства скоростей релятивистской кинематики. На основе математических соотношений геометрии Лобачевского могут быть рассчитаны различные релятивистские эффекты: эффект Доплера, коэффициент увлечения в опыте Физо, отражение световой волны от движущегося зеркала. Н.А. Черников обратил внимание на важность применения геометрии Лобачевского к физике высоких энергий. Он выяснил, что формулы Лобачевского для длины окружности и площади круга являются формулами для импульса и кинетической энергии релятивистской частицы. Кроме того, дефект углов треугольника в геометрии Лобачевского определяет величину дефекта масс в СТО. В результате не вызывает удивления, что формулы геометрии Лобачевского используются при обработке экспериментальных данных, получаемых на современных ускорителях элементарных частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

2. *Гоффман Б.* Корни теории относительности. М.: Знание, 1987.

3. Принцип относительности: Сб. работ по специальной теории относительности. М.: Атомиздат, 1973.

4. *Каган В.Ф.* Основания геометрии. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. Ч. 2: Интерпретация геометрии Лобачевского и развитие ее идей.

5. *Винберг Э.Б.* О неевклидовой геометрии // Соросовский Образовательный Журнал. 1996. № 8. С. 104–109.

6. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского и релятивистская механика // Физика элементар. частиц и атом. ядра. 1973. Т. 4, вып. 3. С. 773–810.

7. *Черников Н.А.* Геометрия Лобачевского как физическая наука // 150 лет геометрии Лобачевского: Сборник: Всесоюз. науч. конф. по неевклидовой геометрии, Казань, 1976: Пленар. докл. М.: ВИНИТИ, 1977. С. 146–153.

8. *Черников Н.А.* Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации // Физика элементар. частиц и атом. ядра. 1992. Т. 23, вып. 5. С. 1156–1191.

9. *Яглом И.М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969 (Б-ка мат. кружка; Вып. 11).

10. *Бронштейн И.Н.*, *Семендяев К.А.* Справочник по математике. М.: Наука, 1986.

Рецензент статьи В.Ч. Жуковский

* * *

Ольга Валерьевна Бабурова, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант кафедры теоретической физики физического факультета МГУ, член правления Московского физического общества. Область научных интересов – общая теория относительности и современная теория гравитационного поля. Автор и соавтор 90 научных работ и семи учебных пособий для студентов.