ТРЕНИЕ – СИЛА ЗНАКОМАЯ, НО ТАИНСТВЕННАЯ

А. А. ПЕРВОЗВАНСКИЙ

Санкт-Петербургский технический университет

Трение может быть полезным и вредным – эту аксиому человек освоил еще на заре цивилизации. Ведь два самых главных изобретения – колесо и добывание огня – связаны именно со стремлением уменьшить и увеличить эффекты трения. Однако понимание природы трения и законов, которым подчиняется это явление, возникло не так уж давно и, к сожалению или к счастью, еще далеко от совершенства. Цель данной статьи – кратко рассказать об основных этапах познания трения вплоть до последних достижений в этой области, причем на самом элементарно-школьном уровне, чтобы дать учителям физики и математики дополнительный материал, с помощью которого они смогли бы пробудить любопытство своих учеников и показать, что не только в глубинах космоса и джунглях Амазонки есть нераскрытые тайны, ожидающие новых исследователей.

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Талантливый человек во всем талантлив, но лишь немногие гении были гениальны во всем, что бы они ни делали, и, пожалуй, за всю историю человечества только один человек – Леонардо да Винчи заслуживает звания абсолютно универсального гения. Как художник, скульптор и инженер он превосходил своих современников. Как ученый он обогнал свою эпоху на века. Среди бесчисленных научных достижений и первая формулировка законов трения. Леонардо (1519) утверждал, что сила трения, возникающая при контакте тела с поверхностью другого тела, пропорциональна нагрузке (силе прижатия), направлена против направления движения и не зависит от площади контакта. Модель Леонардо была переоткрыта через 180 лет Г. Амонтоном и получила окончательную формулировку в работах Ш.О. Кулона (1781). Амонтон и Кулон ввели понятие коэффициента трения как отношения силы трения к нагрузке, придав ему значение физической константы, полностью определяющей силу трения для любой пары контактирующих материалов. До сих пор именно эта формула

$$F_{тр} = f_{тр} P,$$

где P – сила прижатия, а $F_{тр}$ – сила трения, является единственной формулой, фигурирующей в учебниках по физике, а значения коэффициента трения $f_{тр}$ для различных материалов (сталь по стали, сталь по бронзе, чугун по коже и т.д.) входят в стандартные инженерные справочники и служат базой для

FRICTION: A KNOWN AND MYSTERIOUS FORCE

A. A. PERVOZVANSKII

A history and some modern concepts of friction mechanics are presented. A qualitative and a simple formalized description of frictional autooscillations is given as well as a method of their suppression by external high-frequency excitation.

Рассказано об истории изучения трения и современных представлениях о его механизме. Дается качественное и математически формализованное описание фрикционных автоколебаний, а также способа их подавления высокочастотными возмущениями.

© Первозванский А.А, 1998

традиционных технических расчетов. Однако уже в XIX веке стало ясно, что закон Амонтона–Кулона не дает правильного описания силы трения, а коэффициенты трения отнюдь не являются универсальными характеристиками. Прежде всего было отмечено, что коэффициенты трения зависят не только от того, какие материалы контактируют, но и от того, насколько гладко обработаны контактирующие поверхности. Выяснилось также, что сила статического трения отличается от силы трения при движении. Чтобы напомнить, что обычно понимается под статическим трением, представим схему простейшего эксперимента (рис. 1). Будем пытаться сдвинуть с места тело потянув за трос с пружинным динамометром. При малом перемещении конца троса тело остается на месте: силы, развиваемой пружиной динамометра, недостаточно. Обычно говорят, что на контактирующих поверхностях развивается сила трения, уравновешивающая приложенную силу. Постепенно увеличиваем перемещение и вместе с ним упругую силу, приложенную к телу. В какой-то момент она оказывается достаточной для того, чтобы стронуть тело с места. Зарегистрированное в этот момент показание динамометра и называют обычно силой статического трения, характеризующего предельные возможности неподвижного (статического) сцепления тел. Если мы будем продолжать медленно вытягивать трос, то тело поедет по поверхности. Оказывается, что регистрируемые в ходе движения показания динамометра будут не такими, как в момент страгивания. Обычно сила трения при медленном движении меньше силы страгивания, статического трения. Кулон изучал именно силу трения при медленном взаимном перемещении контактирующих тел и установил, что эта сила не зависит от величины скорости, а только от направления движения (всегда направлена против движения).

Конец XIX века ознаменовался замечательными достижениями в исследовании вязкости, то есть трения в жидкостях. Наверное, с доисторических времен известно, что смазанные жиром или даже просто смоченные водой поверхности скользят значительно легче. Смазка трущихся поверхностей применялась с момента зарождения техники, но только О. Рейнольдс в 1886 году дал первую теорию смазки.

При наличии достаточно толстого слоя смазки, обеспечивающего отсутствие непосредственного

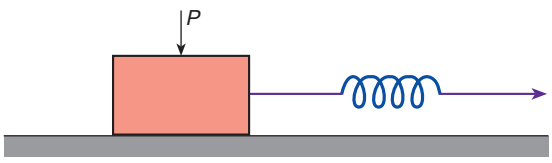


Рис. 1

контакта трущихся поверхностей, сила трения определяется только свойствами (гидродинамикой) смазочного слоя. Сила статического трогания равна нулю, а с ростом скорости сила сопротивления движению увеличивается. Если же смазки недостаточно, то действуют все три механизма: сила статического сопротивления страгиванию с места, кулонова сила и сила вязкого сопротивления. Итак, к концу XIX века выяснилась картина зависимости силы трения от скорости, представленная графиком на рис. 2, *а*. Но уже на пороге XX века возникло сомнение в правильности этой картины при очень малых скоростях. В 1902 году Штрибек опубликовал данные, свидетельствующие о том, что при отсутствии смазки сила сопротивления не падает сразу с уровня силы трогания до кулоновой силы, а возникает постепенное падение силы с ростом скорости – эффект, противоположный гидродинамической вязкости. Этот факт был многократно перепроверен в дальнейшем и теперь обычно именуется штрибек-эффектом. Картина зависимости силы трения от скорости приобрела форму, показанную на рис. 2, *б*.

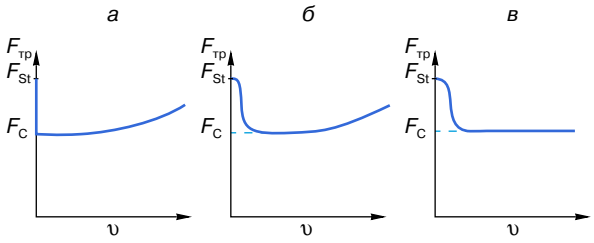


Рис. 2

Быстро развивавшаяся техника XX века требовала все большего внимания к исследованию трения. В 30-е годы исследования в области трения стали настолько интенсивными, что потребовалось выделить их как специальную науку – трибологию, лежащую на стыке механики, физики поверхностных явлений и химии (создание новых смазочных материалов – дело химиков). Только в США в этой области работают в настоящее время более 1000 исследователей, и в мировой науке ежегодно публикуется более 700 статей. Рассказать обо всем и упомянуть всех невозможно (см., например, [1–3]), и дальше будет сделана попытка описать только общую картину и упомянуть только некоторые интересные результаты.

СОВРЕМЕННАЯ КАРТИНА ТРЕНИЯ

Для того чтобы понять хотя бы основы трибологии, следует прежде всего обратиться к топографии поверхностей контактирующих между собой частей реальных механизмов. Эти поверхности никогда не являются идеально плоскими, имеют

микронеровности. Места выступов на одной поверхности отнюдь не совпадают с местами выступов на другой. Как образно выразился один из пионеров трибологии, Ф. Боуден, “наложение двух твердых тел одного на другое подобно наложению швейцарских Альп на перевернутые австрийские Альпы – площадь контакта оказывается очень малой”. Однако при сжатии остроконечные “горные пики” пластически деформируются и подлинная площадь контакта увеличивается пропорционально приложенной нагрузке. Именно сопротивление относительному сдвигу этих контактных зон и является основным источником трения движения. Само сопротивление сдвигу при идеальном контакте определяется межмолекулярным взаимодействием, зависящим от природы контактирующих материалов.

Таким образом, объясняется влияние двух главных факторов: нагрузки (силы прижатия) и свойств материалов. Однако имеются два осложняющих обстоятельства. Во-первых, металлические поверхности на воздухе быстро покрываются тонкой пленкой окислов и фактически контакт осуществляется не между чисто металлическими поверхностями, а между окисными пленками, имеющими более низкое сопротивление сдвигу. Проникновение же любой жидкой или пастообразной смазки вообще меняет картину контакта. Во-вторых, при относительном сдвиге осуществляется не только скольжение по контактным площадкам, но и упругое деформирование выступов, пиков. Выделим схематически только два пика (практически наклон их склонов порядка 10°–20°, но для наглядности они нарисованы на рис. 3 круче). При попытке сдвинуться в горизонтальном направлении один пик начинает прогибать другой, то есть сначала пытается сгладить дорогу, а потом уже скользить по ней. Ширина пиков мала (порядка сотых долей миллиметра), и в пределах таких микросмещений главную роль играет именно упругое сопротивление, то есть сила должна подчиняться закону Гука, быть пропорциональной смещению. Иначе говоря, при микросмещениях контактирующие поверхности оказываются как бы связанными многочисленными пружинками. Но после того как верхний пик в ходе движения перевалит через нижний (причем оба они сплющиваются), пружинка рвется вплоть до встречи с новым препятствием. Таким образом, после приложения продольной силы, стремящейся сдвинуть два тела, могут возникнуть следующие четыре основных режима [3]: режим I упругих микросмещений, режим II скольжения по площадкам контактов мягкого поверхностного слоя (окисных пленок), режим III, когда при большей скорости выдавливаемая жидкая смазка создает подъемную силу, нарушающую большую часть прямых контактов и тем самым снижающую силу трения, режим IV, когда прямые контакты вообще исчезают, одно тело “плывет” над другим по смазочному слою и с увеличением скорости возрастает вязкое сопротивление.

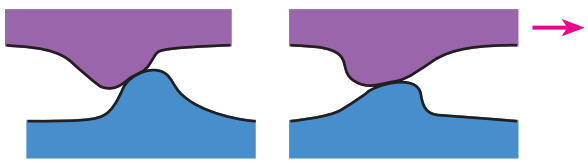


Рис. 3

Этим качественным представлениям соответствует график зависимости коэффициента трения от скорости, представленный на рис. 2, *б*. Заметим, что зона спадания коэффициента трения (зона штрибек-эффекта) обычно очень мала, порядка мм/с. Если же смазка не вводится искусственно, то увеличение трения с ростом скорости почти незаметно и мы возвращаемся к закону Амонтона–Кулона, за исключением зоны очень малых скоростей (рис. 2, *в*).

ФРИКЦИОННЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

Вернемся теперь к самому простому эксперименту (см. рис. 1). Будем тянуть тело с помощью троса, в который врезана пружина динамометра, и притом потянем за хвостик с постоянной скоростью. Окажется, что само тело не двигается с той же скоростью, а перемещается толчками. И это легко качественно объяснимо с помощью представленной выше картины. Действительно, один конец пружины прикреплен к телу, а второй начинает удаляться. К телу приложена упругая сила пружины, пропорциональная ее растяжению. Вначале эта сила мала и меньше силы упругого сцепления контакта (трения покоя), так что тело стоит на месте, а точнее, испытывает только незаметное микросмещение. При дальнейшем вытягивании сила пружины преодолевает силу контакта и тело начинает скользить по поверхности. Но сила сопротивления скольжению ниже статического трения, и возникает положительная разность сил, разгоняющая тело. Пружина начнет сжиматься, а создаваемая ею упругая сила – уменьшаться, тело тормозится, вновь прилипает к поверхности, и придется затратить еще время, чтобы вновь растянуть пружину для преодоления трения покоя.

Таким образом, движение тела оказывается колебательным, в котором периодически сменяются фазы прилипания и скольжения (по-английски это звучит короче – stick and slip). Такое движение принято называть фрикционными автоколебаниями: фрикционными потому, что они порождены трением (friction), а авто потому, что они не навязаны извне какой-либо внешней колеблющейся силой, а являются внутренним свойством системы. Внешнее воздействие – движение конца троса не является колебательным, трос движется с постоянной скоростью. Конечно, через этот трос мы подпитываем тело энергией, поэтому-то колебания являются незатухающими несмотря на потери энергии в контакте.

Фрикционные автоколебания – крайне неприятный эффект. Для многих машин требуется обеспечить плавное, без толчков, медленное движение. Сварочный робот должен плавно вести сварочный аппарат вдоль свариваемого шва: если он будет дергаться, то в одном месте будет перегрев и свариваемые пластины искорежатся, а в другом сварка не осуществится вовсе, аппарат его проскочит. А ведь робот – это механизм, в узлах которого обязательно возникает трение. Как же преодолевать эти неприятности?

Обрисованная картина указывает и на два главных пути уменьшения трения: улучшить качество обработки поверхностей, чтобы уменьшить пики, а тем самым силу страгивания, или обеспечить возможно лучший доступ смазки и сохранность поверхностного слоя. Это самые важные пути, и они предназначены не только для борьбы за плавность хода, но прежде всего для борьбы с ненужными потерями энергии в скользящих контактах. Поиском эффективных видов смазочных материалов и способов их подвода к скользящим поверхностям занимается армия специалистов. Без их успехов невозможен прогресс в машиностроении. Но да простят они нас за то, что дальше мы уделим внимание только одному, совершенно особому методу, отнюдь не главному практически, но крайне интересному и оригинальному.

ВИБРАЦИОННОЕ СГЛАЖИВАНИЕ

Начнем с самого простого эксперимента, который можно осуществить не отходя от стола. Положите какой-нибудь предмет, например тяжелый учебник, на лист бумаги и попытайтесь затем вытянуть этот лист из-под книги. Если вы медленно потянете за лист, книга поползет вместе с ним. Но попытайтесь тянуть не равномерно, а толчками. Скорость движения вытягиваемого листа будет переменной, и, хотя в среднем она может быть прежней или даже меньшей, вы обнаружите, что книга почти останется на месте, а лист из-под нее вытянется. Из-за чего книга не отцеплялась от листа? Конечно, из-за наличия сухого трения, большой силы трения покоя. Из-за чего же это сцепление уменьшилось? Только из-за того, что переменная скорость позволила преодолеть барьер трения покоя и привести тела во взаимное движение.

Вернемся теперь к нашей основной экспериментальной схеме (рис. 1). Пусть на основное движение вытягиваемого конца троса наложены быстрые колебания (на техническом языке – высокочастотные вибрации). Соответственно и сила, приложенная к телу, будет быстро колебаться, вибрировать. Экспериментатор может обнаружить замечательный эффект: неприятное движение толчками исчезнет, прилипание отсутствует, тело будет двигаться плавно, лишь слегка вздрагивая под действием колебаний силы, причем эти колебания могут быть почти незаметны для глаза.

Измерения показывают, что средний уровень силы, регистрируемой динамометром, плавно растет с ростом средней скорости вытягивания троса вплоть до уровня трения скольжения. Примерный график зависимости средней силы сопротивления F от средней скорости $\bar{\upsilon}$ скольжения показан на рис. 4. Отметим, что с увеличением размаха (амплитуды) вибраций кривая становится все более пологой.

Главный вывод очень прост, хотя и удивителен: при не слишком больших средних скоростях средняя сила сопротивления ведет себя не как сухое трение, а как вязкое, жидкое, пропорциональное скорости, а при росте амплитуды эта “средняя” вязкость падает. Такой эффект принято называть вибрационным сглаживанием или ожижением сухого трения под действием высокочастотных вибраций. Он с успехом используется в технике, в особенности в системах управления, использующих механические устройства. В частности, он позволяет сделать движение робота более плавным, а робот – более послушным даже малым сигналам.

Но на самом деле эффект вибрационного сглаживания может проявляться и совсем нежелательным образом, о чем гласит такая печальная история. К северу от Петербурга находится самое большое в Европе Ладожское озеро. Те, кто бывал на нем, хорошо знакомы с его коварным характером. Оно может быть обманчиво тихим, с “зеркальной гладью вод”, но внезапно откуда-то из-за скал подует ветер, и через часок разгуляются волны, и притом крутые и частые. Маленькая байдарка прыгает на них как поплавок, а вот о борт большого корабля волны разбиваются с грохотом, заставляя его корпус дребезжать, то есть испытывать высокочастотную вибрацию. Чтобы избежать коварства Ладоги, еще при Петре I построили обводной канал, чтобы доставлять грузы в Питер по тихой воде. В питерских холодных и мокрых краях хлеб, как известно, растет плохо, и от века пшеницу везли к нам с благодатного юга. Уже в наши времена соединили Волгу с Ладогой и Невой большими каналами и пустили по ним большие корабли для перевозки зерна. Зерно насыпалось в огромные трюмы и ехало в них

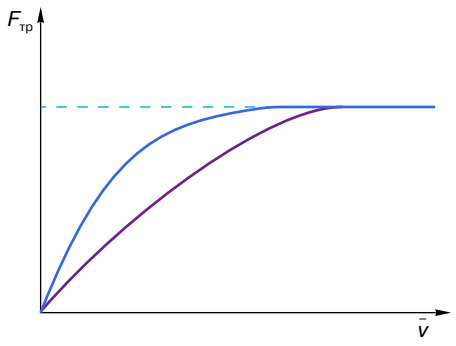


Рис. 4

к месту назначения. Однако в начале работы таких больших судов произошло несколько катастроф: пересекая Ладогу в бурные осенние дни, некоторые корабли вдруг начинали сильно раскачиваться с борта на борт, а затем опрокидывались. В чем же дело? Ведь теперь любой корабль еще при проектировании детально рассчитывается, чтобы он не мог потерять устойчивость. Выяснилось, однако, что проектировщики при расчетах предполагали, что зерно в трюме будет лежать неподвижно, как положено любому сыпучему материалу, например куче песка. За счет чего обеспечивается эта неподвижность? Да за счет все того же сухого трения, сцепляющего между собой песчинки или зерна. Это верно, но при отсутствии высокочастотных вибраций! А эти вибрации превратили сыпучий материал почти в жидкий. Зерно в трюме стало колебаться как вода в тазу, наваливаясь на наклонный борт и способствуя переворачиванию. Наверное, каждый, таскавший в руках таз с водой, помнит, как трудно удержать его в горизонтальном положении.

Конечно, как только эффект был понят, нашлись и достаточно простые инженерные решения, чтобы преодолеть неприятные последствия: как и в тех судах, которые возят настоящие жидкости, трюм был разделен на отсеки, не позволявшие всему ожиженному грузу наваливаться на один борт.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Современная физика далеко ушла от того времени, когда можно было рассуждать на пальцах. Любое явление считается познанным, изученным, только если для него найдено строгое формальное описание, математическая модель, позволяющая рассчитать ход физического процесса, предсказать его поведение. Мы уже убедились, что трение – очень непростое явление, а потому его строгое описание требует и очень тонких математических средств.

Начнем с описания стандартного эксперимента.

Закон Ньютона дает

$$ma = F,$$

где m – масса тела, a – ускорение, а F – равнодействующая приложенных к телу сил. Если x – перемещение тела, а υ_0 – скорость вытягивания, то $\upsilon_0 t - x$ – растяжение пружины, так что

$$F = c(\upsilon_0 t - x) - F_{тр},$$

где через c обозначена жесткость пружины.

Примем простейшую модель трения (XIX век!). Тогда в покое сила трения уравновешивает упругую силу, $F_{тр} = c(\upsilon_0 t - x)$, но вплоть до предела, когда сила достигает уровня F_{St}, после чего начинается движение, когда сила трения удерживается на более низком, кулоновском уровне F_C. Напомним, что скорость есть производная перемещения по времени, а ускорение – производная скорости, то есть вторая производная перемещения. Теперь закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c(\upsilon_0 t - x) - F_C,$$

причем в момент страгивания t_1 тело еще оставалось на месте, то есть $x(t_1) = 0$, и скорость была равна нулю: $\frac{dx}{dt}(t_1) = 0$.

Зная простейшие правила дифференцирования, нетрудно проверить, что в ходе движения, $t \geq t_1$, перемещение и скорость будут изменяться согласно формулам:

$$x(t) = -\frac{\Delta F}{c}\cos\omega_0(t - t_1) - \frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0(t - t_1) + \upsilon_0 t - \frac{F_C}{c},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta F}{c}\omega_0\sin\omega_0(t - t_1) - \upsilon_0\cos\omega_0(t - t_1) + \upsilon_0,$$

где $\Delta F = F_{St} - F_C$, $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

Видно, что скорость сначала возрастает, а потом падает и достигает нуля, то есть тело остановится.

Хорошим упражнением по тригонометрии может послужить доказательство того, что продолжительность интервала движения

$$T_{дв} = \frac{2}{\omega_0}\left[\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right], \qquad \gamma = \frac{\Delta F\omega_0}{c\upsilon_0}.$$

После остановки тело вновь прилипает и останется неподвижным, пока упругая сила не преодолеет барьер F_{St}. Также элементарными средствами можно доказать, что длительность интервала покоя

$$T_п = \frac{2}{\omega_0 c}(F_{St} - F_C).$$

Очевидно, что дальше все будет повторяться с периодом $T = T_{дв} + T_п$, то есть скорость будет периодически колебаться (рис. 5).

Итак, сравнительно просто удалось построить формулы, позволяющие описать движение и предсказать длительности интервалов покоя, которые, как было показано, не должны зависеть от скорости. Однако тщательные эксперименты показывают обратное: как правило, интервалы покоя уменьшаются при увеличении скорости. Конечно, дело не в математической ошибке, а в физике: регистрация силы в момент отрыва показала, что она падает

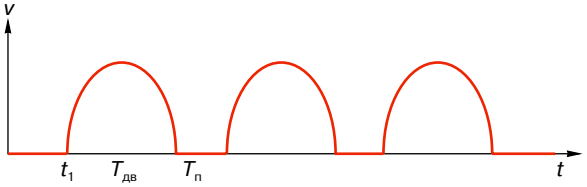


Рис. 5

с увеличением роста, что уже отмечалось выше. Чтобы учесть этот факт, надо изменить саму классическую модель трения. Среди многих новых моделей одна отличается наибольшей простотой, позволяя при этом объяснить основные экспериментальные факты. Основная идея этой модели [4] проста: сила трения определяется упруговязким сопротивлением деформации пиков на неровных поверхностях, а сама средняя скорость деформации $\frac{dz}{dt}$ зависит от скорости υ относительного движения. Формально имеем

$$F_{\text{тр}} = \left(-c_0 z + c_1 \frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{dz}{dt} = \upsilon - \frac{c_0 z}{F(\upsilon)}|\upsilon|,$$

где зависимость $F(\upsilon)$ соответствует кривой, представленной на рис. 2, *б* или *в*. Отказавшись для простоты от учета вязкости, то есть положив $c_1 = 0$, и приняв график на рис. 2, *в*, исключим переменную z. Тогда для силы сухого трения получим соотношение

$$F_{\text{тр}} = -F(\upsilon)\operatorname{sign}\upsilon - \frac{1}{c_0}\frac{F(\upsilon)}{|\upsilon|}\frac{dF_{\text{тр}}}{dt}.$$

Мы убеждаемся, что сила трения зависит не только от скорости υ относительного перемещения контактирующих поверхностей, но и от скорости роста самой силы. Если жесткость пиков c_0 считать бесконечной, то второе слагаемое пропадет и мы придем к обычной формуле, отличающейся от классической только учетом штрибек-эффекта. Однако чем больше скорость роста силы, тем меньше оснований пренебрегать этим слагаемым.

МАТЕМАТИКА ВИБРАЦИОННОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Для обеспечения вибрационного сглаживания требуется приложить быстроменяющуюся силу. Поэтому ясно, что классическая модель может оказаться непригодной. Однако математическая задача описания даже простого эксперимента становится очень сложной. Действительно, надо учесть управление движения, которое выглядит как

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = c(\upsilon_0 t + a\sin\omega t - x) - F_{\text{тр}},$$

где учитывается, что трос вытягивается не равномерно, а еще колеблется по синусоидальному закону с высокой частотой ω, а кроме того, сама сила трения связана со скоростью $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ еще одним дифференциальным уравнением. Получить явное точное решение здесь невозможно. Однако удается построить хорошее приближенное решение используя идеи замечательных российских математиков Н.Н. Боголюбова и А.Н. Тихонова. Приводить строгие формулировки их теорем затруднительно, но их смысл очень прост. Теорема Боголюбова утверждает: если на тяжелое, инерционное тело действуют быстроколеблющиеся силы, то оно в основном реагирует только на среднее значение силы, испытывая лишь дополнительную мелкую дрожь, которой можно пренебречь. Теорема Тихонова говорит: если в системе могут совершаться и быстро устанавливающиеся и медленные движения, то при рассмотрении медленных можно пренебречь процессом установления быстрых.

Конечно, эти слова не отражают всей глубины математических результатов (см., например, [5, 6]), но помогут понять суть процедуры, упрощающей анализ проблемы вибрационного сглаживания. Процесс изменения силы трения быстро принимает установившийся периодический характер (этому способствует большая величина c_0), и на движение самого тела в основном влияет лишь ее среднее значение, а оно оказывается зависящим от средней скорости смещения именно тем плавным образом, который уже описывался на рис. 4. Практически очень важно, что характеристики средней силы почти не зависят от поведения штрибек-эффекта, нестабильного и трудно оцениваемого экспериментально [7].

В заключение еще раз подчеркнем, что все аспекты науки о трении – и физические, и математические – очень далеки от окончательного завершения и главная цель этой статьи – привлечь внимание к тайнам трения нового поколения исследователей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крагельский И.В.*, *Добычин М.Н.*, *Комбалов В.С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.

2. *Блехман И.И.*, *Джанелидзе Г.И.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 313 с.

3. *Armstrong-Helouvry B.*, *Dupont P.*, *Canudas de Wit C.* A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for Control of Machines with Friction // Automatika. 1994. Vol. 30, № 7. P. 1083–1138.

4. *Canudas de Wit C.*, *Olsson H.*, *Astrom K.J.*, *Lishinsky P.* A New Model for Control of Systems with Friction // IEEE Trans. AC-40. 1995. № 3. P. 419–425.

5. *Волосов В.М.*, *Моргунов Б.И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.

6. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.

7. *Pervozvanski A.*, *Canudas de Wit C.* Vibrational Smoothing in Systems with Dynamic Friction // Subm. to Trans. ASME. 1998.

* * *

Анатолий Аркадьевич Первозванский, доктор технических наук, профессор кафедры “Механика и процессы управления” Санкт-Петербургского технического университета, заслуженный деятель науки и техники РФ. Область научных интересов: теория управления, теория колебаний, исследование операций. Автор более 200 статей и десяти книг.