ELECTROELASTICITY. FUNDAMENTALS OF THE THEORY AND SOME APPLICATIONS

Yu. A. USTINOV

The studies of piezoelectricity (or electroelasticity) which are actively employed at present are discussed. This research uses both classic mechanics of deforming solids and electrodynamics of dielectrics. The development of this scientific field from fundamental research to the technical application is outlined.

ЭЛЕКТРОУПРУГОСТЬ. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Ю. А. УСТИНОВ

Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону

В статье описаны исследования пьезоэлектричества (или электроупругости), которые активно проводятся в настоящее время. Эта работа осуществляется на стыке классической механики твердого деформируемого тела и электродинамики диэлектриков. Прослежен путь формирования этого научного направления от фундаментальных исследований до первых технических применений.

ВВЕДЕНИЕ

Электроупругость – это научное направление в естествознании, которое занимается исследованием проблем, находящихся на стыке двух классических научных направлений: механики твердого деформированного тела и электродинамики (электростатики) сплошных сред. Сам термин *электроупругость* появился сравнительно недавно (в 60-х годах) и широко употребляется главным образом среди представителей механики деформируемого твердого тела. Среди физиков более употребим традиционный термин *пьезоэлектричество*.

Просматривая школьные учебники по физике, я не обнаружил даже упоминания о пьезоэлектричестве. Вместе с тем область практического применения приборов и устройств, использующих в своих конструкциях пьезоэффект, постоянно расширяется, а некоторые изделия, как, например, пьезозажигалки, стали предметами повседневного быта. Пьезоэлементы используются в телевизорах и телефонах, которые также можно отнести к предметам повседневного быта. Функциональные назначения пьезоэлементов в пьезозажигалке, телевизоре и телефоне различны, однако в основе их устройств лежит одно и то же физическое явление, на которое и хотелось бы обратить внимание. Это первый мотив выбора темы статьи. Второй мотив методологический: проследить путь от первых фундаментальных исследований к первым техническим устройствам, показать, как первые технические применения порождают новые теоретические проблемы, и на этом пути ввести читателей в область основных соотношений и понятий, которые используются при исследовании электроупругости.

Данную статью следует рассматривать как введение к следующей, которая будет посвящена современному математическому моделированию в электроупругости.

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ОТКРЫТИЯ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

Пьезоэлектрический эффект был открыт в 1880 году братьями Пьером и Жаком Кюри. Они обнаружили, что если кристаллы некоторых диэлектриков (сегнетовой соли, кварца и др.) подвергнуть механическому воздействию, сжатию, то на их поверхности появляются электрические заряды

© Устинов Ю.А., 1996

противоположных знаков, или, как теперь принято говорить, в кристалле возникает наведенная поляризация, которая создает внешнее и внутреннее по отношению к кристаллу электрические поля. Это явление – возникновение электрического поля в результате давления – было названо *прямым пьезоэффектом*.

Было ли это открытие случайным или ему предшествовала научная гипотеза? При исследовании электрических свойств твердых диэлектриков кристаллической структуры Пьер Кюри сформулировал весьма общий принцип, который теперь называется *принципом Кюри*. Смысл его состоит в следующем: явление обладает всеми признаками симметрии, которыми обладает причина, их породившая; асимметрия явления предопределена асимметрией причины. Поскольку в вершинах кристаллической решетки расположены ионы противоположных знаков, то суммарный заряд кристаллов любой формы равен нулю. Однако если центры положительных и отрицательных зарядов не совпадают, то дипольный момент кристалла отличен от нуля и обладает поляризацией. Поэтому если дипольный момент кристалла в недеформированном состоянии равен нулю, то в результате деформации кристалла под механическим воздействием центры положительных и отрицательных ионов могут сместиться один относительно другого и на поверхностях кристалла появляются заряды противоположных знаков. Возможность такого смещения зависит от симметрии (формы) кристалла.

Сформулированный принцип и теория групп позволили выделить классы кристаллов, которые обладают пьезоэффектом. Обратный пьезоэффект состоит в том, что свободные кристаллы, обладающие прямым пьезоэффектом, под воздействием электрического поля деформируются. Вскоре братья Кюри экспериментально подтвердили обратный пьезоэффект.

Первые количественные измерения, устанавливающие связь величины заряда с давлением на кристаллах сегнетовой соли, были проведены Поккельсом в 1894 году.

В математическую форму эти количественные соотношения были облечены немецким ученым Фойгтом (Voigt) в 1910 году. В 1928 году он привел достаточно полную систему этих соотношений, которая обобщала накопленные знания в области пьезоэлектричества за предшествующий период. Соотношения, полученные Фойгтом, являются основополагающими для построения математической модели в электроупругости.

Чтобы объяснить соотношения, полученные Фойгтом, необходимо напомнить основные соотношения теории упругости и электродинамики, ввести читателя в круг основных терминов и понятий, которые используются в этих научных направлениях.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

В 20 – 40-х годах XIX века благодаря усилиям плеяды блестящих ученых (Навье, Коши, Пуассон, Грин и др.) завершается построение линейной теории упругости как математической модели, призванной описывать поля напряжений и деформаций твердых тел, возникающих в них под воздействием внешних сил механической природы. Здесь уместно отметить, что на том этапе развития естествознания такая математическая модель возникла из потребности объяснить оптические явления при помощи гипотезы о среде, обладающей физическими свойствами упругого тела. Однако сопоставление выводов, вытекающих из теории, с наблюдаемыми в эксперименте фактами показало, что не существует светоносной среды, обладающей физическими свойствами, которые вытекали из принятой гипотезы. Отрицательный ответ стимулировал поиск новых гипотез и построение иных моделей, что в конечном счете привело к расширению взглядов на природу света.

Для описываемого напряженно-деформированного состояния тела, занимающего объем V произвольной формы, оказалось недостаточным использовать простое скалярное представление о напряжении и деформации

$$\sigma = \frac{P}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Здесь σ – напряжение, P – сила, растягивающая (сжимающая) стержень с площадью поперечного сечения S и длиной l, ε – деформация, Δl – удлинение.

Коши пришлось ввести понятия тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. Тензор – математическое понятие, и в иерархии понятий скаляр, вектор, далее идет тензор второго ранга, третьего и т.д; $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры второго ранга. Произвольный тензор второго ранга $\mathbf{t}$ характеризуется девятью скалярными величинами, которые называются компонентами и обозначаются t_{ij}. Наиболее распространенной является матричная форма записи тензора второго ранга

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ являются симметричными, то есть $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$, $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$.

Компоненты σ_{ij} тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ характеризуют внутренние силы взаимодействия между отдельными частицами деформируемого тела. Смысл отдельных компонент можно понять из рис. 1, на котором изображен элементарный параллелепипед, вырезанный (мысленно) в теле, а действие отброшенной части тела заменено силами, величина которых равна $\sigma_{ij}S_i$, где S_i – площадь соответствующей грани параллелепипеда.

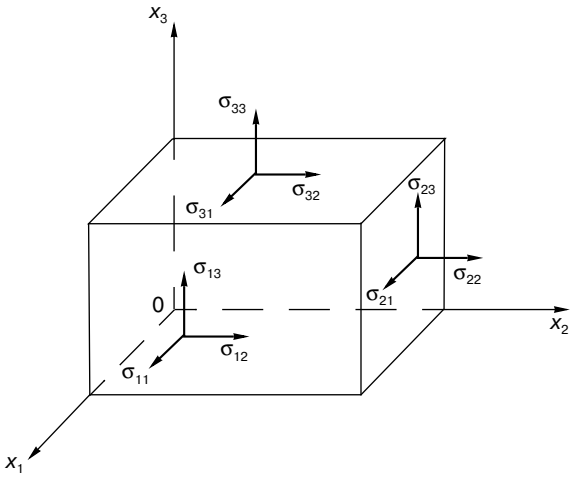


Рис. 1.

Тензор деформаций **ε** является математическим средством, позволяющим описать изменение расстояний между точками среды и углов между выбранными направлениями в данной точке. При этом компоненты ε_{ii} характеризуют относительное удлинение (сжатие) волокна, первоначально параллельного координатной оси x_i, компоненты $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ ($i \neq j$) описывают искажение прямого угла между двумя волокнами, выходящими из выбранной точки и параллельными осям x_i и x_j (рис. 2).

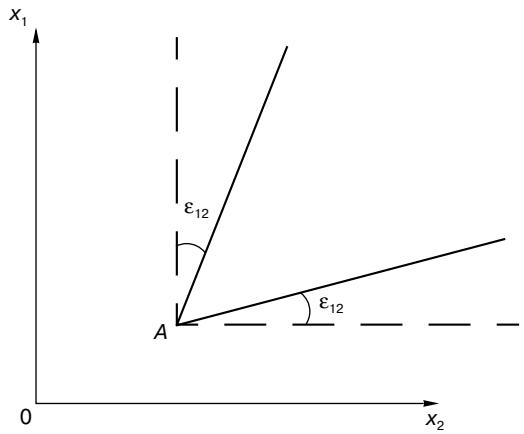


Рис. 2.

Для описания смещений отдельных частиц среды используется вектор перемещений **u**, компоненты которого u_i в общем случае являются функциями координат x_1, x_2, x_3 и времени t. В случае равновесия u_i зависят только от координат.

Компоненты вектора смещений и деформаций связаны между собой, и в линейной теории упругости эта связь определяется следующими выражениями, полученными Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \qquad (1)$$

Компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны между собой. Вид этой связи зависит от свойств среды и величины напряжений; она устанавливается на основе серии экспериментов. Во многих практически важных случаях такую связь можно считать линейной – ее называют *обобщенным законом Гука*. Существует несколько форм записи этого закона.

Если для компонент тензоров напряжений и деформаций ввести новые обозначения:

$$\sigma_{11} = \sigma_1, \quad \sigma_{22} = \sigma_2, \quad \sigma_{33} = \sigma_3,$$
$$\sigma_{23} = \sigma_4, \quad \sigma_{31} = \sigma_5, \quad \sigma_{12} = \sigma_6,$$
$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3,$$
$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_4, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_5, \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_6,$$

одна из таких связей выглядит так:

$$\sigma_k = \sum_{l=1}^{6} s_{kl}\varepsilon_l, \quad k, l = 1, \ldots, 6. \qquad (2)$$

Коэффициенты s_{kl} называются *упругими податливостями*. Можно строго доказать, что $s_{lk} = s_{kl}$, в силу чего в самом общем случае произвольной анизотропной среды независимыми являются только 21 упругая постоянная.

Реально большинство сред и кристаллов обладают определенными свойствами симметрии, и, зная эти свойства, легко установить количество независимых констант и тем самым уменьшить число независимых экспериментов, на основе которых они определяются. Примером анизотропного тела может служить дерево, поскольку величина деформации (относительного удлинения), если величина растягивающей силы одинакова, зависит от того, как мы растягиваем вырезанный из дерева брусок: вдоль волокон или поперек. Материалы, свойства которых не зависят от направления приложенной силы, называются *изотропными*. Изотропными можно считать большинство металлов, пластмасс и др. Для таких материалов упругие постоянные s_{kl} могут быть выражены через хорошо известные модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν. В этом случае

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = \frac{1}{E}, \quad s_{12} = s_{13} = -\frac{\nu}{E},$$

$$s_{44} = s_{55} = s_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E},$$

$$s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{24} = s_{25} = s_{26} = s_{34} = s_{35} = s_{36} = 0.$$

Замкнутая система соотношений теории упругости получается, если к уравнениям (3), (4) добавить

уравнения движения (равновесия) сплошной среды. Эти уравнения можно получить, выделяя малую частицу тела и рассматривая ее движение на основе второго и третьего законов Ньютона. Приведем эти уравнения:

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + K_i = 0; \qquad (3)$$

здесь ρ – плотность материала среды, K_i – проекции объемных сил. Простейшим примером объемной силы может служить сила тяжести. В этом случае

$$K_i = \rho g \cos \alpha_i,$$

где g – ускорение силы тяжести, α_i – углы между направлением силы тяжести и осями выбранной системы координат.

В результате последовательных подстановок (1) в (2), а затем (2) в (3) получается система трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно смещений. Эти уравнения достаточно сложны, и разработкой методов их решения занимаются и по сей день. Замечу также, что исследования этих уравнений способствовали развитию методов решения краевых задач математической физики в целом.

С середины XIX века линейная теория упругости стала широко использоваться для исследования прочности инженерных конструкций и сооружений, в геофизике и ее прикладных областях.

Во второй половине XIX века английский ученый Максвелл получил уравнения электродинамики, описывающие распространение электромагнитных волн. В школьных учебниках вопросам электродинамики уделено значительно больше места, нежели механике сплошной среды. Поэтому я ограничусь здесь минимумом понятий, которые необходимы для разъяснения соотношений, полученных Фойгтом.

Как известно, уравнения электродинамики устанавливают дифференциальную связь между векторами напряжений электрического поля **E**, электрической индукции **D**, напряженности магнитного поля **H**, магнитной индукции **B**. Все пьезоэлектрики являются диэлектриками, а пьезоэлектрические эффекты, которые в них протекают, можно условно назвать квазимеханическими, поскольку они связаны со скоростями, значительно меньшими скорости света в диэлектрике. В этом случае магнитными эффектами можно пренебречь и вместо уравнений электродинамики рассматривать уравнения электростатики, которые для диэлектрика, не обладающего пьезоэффектом, можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \qquad (4)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} э_{ij} E_i. \qquad (5)$$

В уравнении (5) $э_{ij}$ – компоненты тензора диэлектрических проницаемостей (постоянные материала, определяющие его свойства как диэлектрика). В простейшем случае изотропного диэлектрика эта связь принимает хорошо известный вид

$$\mathbf{D} = э\mathbf{E},$$

где $э$ – диэлектрическая проницаемость. Способы ее определения приводятся в школьных учебниках.

Для большинства диэлектрических материалов механическое поле, которое определяется тензорами $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ (или вектором смещений **u**), и электрическое поле, которое определяется векторами **E**, **D** или потенциалом электрического поля

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad E_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \qquad (6)$$

не связаны.

Открытие братьев Кюри на примере конкретных кристаллов показало, что такая связь возможна, и Фойгт облек ее в математическую форму. В современном варианте это выглядит так:

$$\varepsilon_k = \sum_{l=1}^{6} s_{kl} \sigma_l + \sum_{j=1}^{3} d_{jk} E_j, \quad D_i = \sum_{l=1}^{6} d_{li} \sigma_l + \sum_{j=1}^{3} э_{ij} E_j. \quad (7)$$

В этих соотношениях появилась еще одна группа материальных постоянных d_{jk}, которые называются *пьезомодулями* и определяются из эксперимента.

В ряде практически важных случаев эти соотношения можно существенно упростить. Так, например, для тонкой пластины, вырезанной специальным образом из кристалла, они принимают простейший скалярный вид:

$$\varepsilon = s\sigma + d\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = d\sigma + э\mathbf{E}. \qquad (8)$$

Здесь вектор напряженности электрического поля направлен поперек пластины. Если ее поверхности покрыты электродами и к ним подведена разность потенциалов V, $E = V/h$, где h – толщина пластины.

Соотношения (1), (3), (4), (7) образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений линейной электроупругости. Вместе с тем из этих же соотношений становится очевидным сам термин *электроупругость*. Дополняя эти уравнения условиями на поверхности тела (граничными условиями) и условиями, определяющими состояние тела в некоторый фиксированный момент времени t_0 (начальными условиями), приходим к начально-краевым задачам, которые являются основой одного из направлений математического моделирования в электроупругости.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАНЖЕВЕНА. ПЬЕЗОКЕРАМИКА

Первое техническое применение пьезоэффекта было осуществлено Ланжевеном. В 1920 году он создал ультразвуковой преобразователь для передачи

и приема информации в воде, который явился прообразом современных ультразвуковых излучателей, используемых на подводных лодках, для обнаружения косяков рыб и в других целях.

Преобразователь Ланжевена очень прост. Он представляет собой трехслойную пластину (рис. 3). Ее средний слой изготовлен из кварца, который обладает пьезоэффектом, а внешние слои металлические. Один из слоев при погружении лодки соприкасается с водой: через него и осуществляется излучение и прием ультразвука.

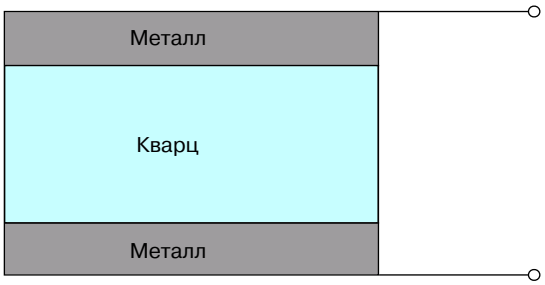


Рис. 3.

Как часто бывает, первые технические применения порождают новые проблемы. Одна из них состоит в обеспечении необходимой мощности и направленности излучателя и чувствительности приемника.

Кварц, который первоначально был, по существу, единственным материалом для конструирования пьезопреобразователей с очень широким диапазоном технических применений, обладая такими важными достоинствами, как высокая стабильность свойств по отношению к температурным воздействиям и высокая добротность, обладает и одним существенным недостатком: у него низкий коэффициент электромеханической связи (КЭМС). Величина КЭМС характеризует способность устройства преобразовывать один вид энергии в другой. Она зависит как от свойств пьезоактивного материала, так и от конструкции самого пьезопреобразователя. В случае простейшего электронапряженного состояния, описываемого соотношениями (8), КЭМС можно подсчитать по формуле

$$k^2 = \frac{d^2}{s\varepsilon}. \qquad (9)$$

По существу, выражение (9) характеризует свойство материала, его способность преобразовывать один вид энергии в другой.

В реальных конструкциях элементы из электрических материалов используются в соединении с другими элементами (это видно уже на примере преобразователя Ланжевена), которое находится в контакте с внешней средой. Все это делает проблему определения полного КЭМС для преобразователя в целом достаточно сложной.

После введения понятия КЭМС специалистам стало ясно, что его увеличения можно добиться двумя способами:

1) созданием материала с более высоким исходным КЭМС;

2) оптимизацией параметров преобразователей путем разумного сочетания математического моделирования и физического эксперимента.

Первая проблема материаловедческая, она относится к сфере физики твердого тела и физхимии; вторая проблема ближе к механике.

Следующим важным этапом в развитии электроупругости явилось создание пьезокерамики на основе сегнетоэлектриков. Это было осуществлено в конце 40-х годов сразу в нескольких странах.

Первая пьезокерамика была получена на основе порошка титаната бария. Кристаллы титаната бария при температуре ниже 118°С (температура Кюри) не обладают электрической симметрией, и их дипольный момент отличен от нуля. Кроме того, поликристаллические структуры разбиваются на подобласти (домены), содержащие кристаллы с однонаправленным вектором поляризации. На основе порошка из поликристаллов путем спекания и прессования получается керамика. В такой керамике домены расположены хаотично, и она не обладает пьезоэффектом. Важнейшим технологическим этапом в получении пьезокерамики является поляризация в сильном электрическом поле (около 20 – 30 кВ/с), которая осуществляется с помощью электродов, нанесенных на поверхность спекаемого и прессуемого образца. В результате такого воздействия домены выстраиваются вдоль силовых линий внешнего электрического поля. По истечении некоторого времени и после охлаждения в образце сохраняется поляризация. Это явление называется предварительной поляризацией.

Открытие пьезокерамики существенно расширило область технических применений пьезоэлектричества и стимулировало дальнейшие фундаментальные исследования как в области создания новых материалов, так и в области математического моделирования. Можно выделить два свойства пьезокерамических материалов, дающих им преимущество перед кристаллами: 1) современная керамика обладает значительно более высоким исходным КЭМС в сравнении с кварцем (для некоторых типов напряженных состояний КЭМС равен 0,7, для кварца 0,095); 2) она позволяет при необходимости создавать элементы сложной геометрической формы при различных типах предварительной поляризации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно выделить два направления, определяющих развитие электроупругости в настоящее время:

первое связано с созданием новых материалов, в том числе композиционных, и прогнозированием их свойств, второе – развитие математического моделирования в области совершенствования расчетов преобразователей различного назначения. Параллельно ведутся работы по созданию пакетов программ для ЭВМ.

В заключение перечислим некоторые области применения пьезоэлектрического эффекта:

– излучатели и антенны в гидроакустике,

– стабилизаторы частоты в радиотехнических устройствах и эталонах времени,

– электрические фильтры и линии задержки в радио- и телефонной связи,

– датчики для измерения ускорений, уровня вибрации, акустической эмиссии при неразрушающем контроле,

– пьезотрансформаторы и пьезодвигатели,

– в медицинской томографии, а также в медицинских инструментах различного назначения.

Замечание. Описываемые оригинальные результаты опубликованы в специальных и труднодоступных журналах. Поэтому в тексте статьи отсутствует нумерация этих источников, а ниже приводится основной список монографий, где эти источники цитировались и которые были использованы при работе над текстом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.

2. *Мэзон У.* Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультраакустике. М.: Иностранная литература, 1952.

3. Ультразвуковые преобразователи. Обзор. М.: Мир, 1972.

4. *Балакирев М.К.*, *Гилинский И.А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.

5. *Гринченко В.Т.*, *Улитко А.Ф.*, *Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989.

* * *

Юрий Анатольевич Устинов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета. Автор 100 статей и двух монографий.