Индивидуальное задание № 1 по уравнениям математической физики
2025-2026 учебный год

Задание 1. Ряды Фурье

В задачах $1.1 - 1.20$ даны значения функции $f(x)$ на одном полном периоде.
1) Найдите ряд Фурье этой функции. Все вычсления необходимо провести подробно. Задание выполнить черной ручкой на белом листе бумаги и сдать в бумажном виде.
2) Постройте график этой функции на промежутке, равном нескольким периодам, воспользовавшись любым стандартным математическим пакетом вычислений. Представьте в электронном виде график функции и текст программы. Загрузите результаты в Moodle в формате pdf.
3) Постройте графики частичных сумм S_N ряда Фурье для нескольких значений N. Например, $N = 1$, $N = 3$, $N = 8$, $N = 10$, $N = 20$. Представьте в электронном виде графики частичных сумм и текст программы. Загрузите результаты в Moodle в формате pdf.

1.1.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\, x; & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{2}{\pi}\,(\pi - x); & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 2\, x; & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 2\,(1 - x); & \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

1.3.

$$f(x) = \begin{cases} -1; & 0 < x \leqslant \pi \\ +1; & \pi < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

1.4.

$$f(x) = \begin{cases} +3; & -\pi < x \leqslant 0 \\ -3; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.5.

$$f(x) = \begin{cases} +3; & -\pi < x \leqslant 0 \\ -2; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.6.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x \leqslant 0 \\ 1; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.7.

$$f(x) = x \quad -\pi < x \leqslant \pi.$$

1.8.

$$f(x) = x \quad 0 < x \leqslant 2\pi.$$

1.9.

$$f(x) = |x| \quad -\pi < x \leqslant \pi.$$

1.10.

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x; & -\pi < x \leqslant 0 \\ \pi - x; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.11.

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x; & -\pi < x \leqslant 0 \\ 0; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.12.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi \leqslant x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 1; & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0; & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.13.

$$f(x) = x^2 \quad -\pi < x \leqslant \pi.$$

1.14.

$$f(x) = x^2 \quad 0 \leqslant x < 2\pi.$$

1.15.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x \leqslant 0 \\ x^2; & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.16.

$$f(x) = |\sin(x)| \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

1.17.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi < x \leqslant 0 \\ \sin(x); & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

1.18.

$$f(x) = \begin{cases} -2; & -3 < x \leqslant 0 \\ 2; & 0 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

1.19.

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -5 < x \leqslant 0 \\ 1; & 0 < x \leqslant 5 \end{cases}$$

1.20.

$$f(x) = \begin{cases} 2; & -2\pi < x \leqslant 0 \\ -1; & 0 < x \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Задание 2. Уравнение теплопроводности

В задачах $2.1 - 2.20$ требуется сформулировать и решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с условиями периодичности, взяв значение периода и значения начальной функции $f(x)$ из своего задания 1 (список $1.1 - 1.20$).
Все вычисления необходимо провести подробно. Задание выполнить черной ручкой на белом листе бумаги и сдать в бумажном виде.

Задание 3. Теоретические задачи

Следующие задания взяты из конспекта лекций В.И.Юдовича. Задание выполнить черной ручкой на белом листе бумаги и сдать в бумажном виде.

1.2) Вывести уравнение теплопроводности для стержня переменного сечения $S(x)$.

1.6) Показать, что если стержень движется вдоль оси x со скоростью $v = v(t)$, то вместо простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t).$$

получится уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v(t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t).$$

Выведите это уравнение из простейшего уравнения теплопроводности посредством перехода к подвижной системе координат, жестко связанной со стержнем.

1.7) Доказать, что уравнение

$$u_t = ku_{xx} + lu_x + mu$$

с постоянными коэффициентами k, l, m можно привести к простейшему однородному уравнению теплопроводности заменой

$$u(x,t) = v(x,t)\exp(ax + bt), \quad a, b - \text{const}.$$

Вывести краевые условия, которым удовлетворяет v, если u удовлетворяет условиям первого, либо второго, либо третьего рода.

1.11) Какие краевые условия позволяют стержню все время находиться при постоянной температуре, так что $u(x,t) = T = \text{const}$ для всех x и t?

1.12) Эксперимент говорит, что если концы стержня поддерживаются при постоянной температуре, так что $u(0,t) = T_0$, $u(l,t) = T_1$, где T_0 и T_1 постоянные, то в стержне устанавливается со временем линейное распределение температуры:

$$u(x,t) = \frac{xT_1 + (l-x)T_0}{l} = \frac{T_1 - T_0}{l}x + T_0.$$

Не опровергает ли это уравнение теплопроводности?

2.1) Решить методом Фурье начальную задачу для уравнения

$$u_t + ku_{xxxx} = 0$$

на окружности с начальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$.

2.5) При каких p сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}?$$

2.13) Найдите решение второй краевой задачи

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0; \\ &u|_{t=0} = \varphi; \\ &u_x(0,t) = 0; \quad u_x(\ell,t) = 0 \end{aligned}$$

с постоянными f и φ. Дайте физическую трактовку решения. Для каких еще краевых условий решение будет иметь тот же вид?

2.14) Найдите решение первой краевой задачи

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx} + A\cos t, \quad x \in (0,\ell), \quad t > 0; \\ &u|_{t=0} = 0; \\ &u(0,t) = A\sin t; \quad u(\ell,t) = A\sin t. \end{aligned}$$

Как можно изменить краевые условия, чтобы вид решения остался неизменным?

3.1) При каких условиях квадратичная форма от двух переменных $\xi, \eta \in \mathbb{R}$

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2$$

а) положительно определенная? б) отрицательно определенная?
в) неотрицательно определенная? г) неположительно определенная?

3.2) При каких условиях для решения $u(x,y,t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant 0$$

справедлив принцип максимума? Существенно ли, что a, b, c — постоянные коэффициенты?

3.3) Доказать теорему единственности решения первой начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t)u; \quad u\big|_{x=0} = \mu_1(t) \\ &u\big|_{x=l} = \mu_2(t); \qquad\qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x). \end{aligned}$$

Подсказка: сделать замену $u = ve^{\mu t}$ и применить теорему 3.4.

3.5) Доказать, что решение $u(x, y)$ уравнения Монжа-Ампера

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)$$

не имеет локальных максимумов внутри области его определения, если всюду в этой области $f(x, y) < 0$. А минимумы могут быть?

3.6) Доказать теорему единственности для начально-краевой задачи с неоднородным периодическим краевым условием $(x \in \mathbb{R}, t \geqslant 0)$

$$u_t = ku_{xx} + f(x, t); \quad u\big|_{t=0} = \varphi(x); \quad u(x + l, t) - u(x, t) = h(x, t)$$

для заданных f, φ, h.

3.12) Для решения $u(x, t)$ уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = f(x, t)$ на окружности $(u(x + l, t) = u(x, t)$ для всех $t \geqslant 0, x \in \mathbb{R})$ доказать равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(x, t)\,dx = -\int_0^l u_x^2(x, t)\,dx + \int_0^l f(x, t)u(x, t)dx.$$

Какие важные следствия из него вытекают?

4.18) Доказать, что для решения второй начально-краевой задачи

$$u_t = u_{xx}; \quad u_x\big|_{x=0} = u_x\big|_{x=l} = 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l u^2(x, t)dx = -\int_0^l u_x^2(x, t)\,dx, \quad t > 0.$$

Вывести отсюда теорему единственности решения этой начально- краевой задачи.

7.6) Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)\,dx$$

не зависит от t для решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой без источников тепла. Найти, как он зависит от времени для задачи с источниками. Объяснить физически полученный результат.

7.8) Доказать, что, если φ — непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ и абсолютно интегрируемая функция:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\, dx < \infty,$$

то решение $u(x,t)$ задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности на прямой при $t \to \infty$ стремится к 0 как $t^{-1/2}$ равномерно по $x \in (-\infty, +\infty)$. Предложите условия, достаточные для того, чтобы $u(x,t)$ затухала при $t \to +\infty$, как t^{-1}, как t^{-2}, как e^{-kt} и т.д.

9.1) Доказать, что решение задачи Коши в обобщенных функциях

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} = \delta(t-\tau)\varphi(x), \\ &u\Big|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

равно нулю при $t < \tau$, а при $t \geqslant \tau$ совпадает с решением задачи Коши

$$u_t - u_{xx} = 0; \quad u\Big|_{t=\tau} = \varphi(x).$$