Вариант 1: Анализ и верификация решений

1. **Алгебраическое уравнение с проверкой точности:**
   Решите уравнение x^4 - 3*x^3 + x^2 + 3*x - 2 = 0. Найдите все корни. Установите Digits:=20. Проверьте точность решения для каждого корня, вычислив невязку subs(x=root, f). Объясните, почему невязка для действительных корней отличается от невязки для комплексных.
2. **Трансцендентное уравнение с выбором метода:**
   Для уравнения tan(x) = x / (1 + x^2):

- Постройте график для визуального определения количества корней на интервале [-5, 5].
- Используйте fsolve с разными начальными приближениями, чтобы найти все корни.
- Объясните, почему команда solve не дает явного результата для этого уравнения.

3. **Система неравенств с параметром:**
   Исследуйте систему неравенств в зависимости от параметра a:
   x^2 - a*x - 5 < 0
   x^2 - 2*x + 4 > 0
   Для a = 1, 3, 5 определите интервалы, являющиеся решением системы. Постройте соответствующие области на числовой прямой.

Вариант 2: Работа с специальными настройками и функциями

1. **Тригонометрическое уравнение с периодичностью:**
   Решите уравнение sin(2*x) = cos(3*x).

- Сначала решите с стандартными настройками.
- Активируйте EnvAllSolutions := true и решите снова. Проанализируйте разницу в решениях.
- Используя полученное общее решение, найдите все корни на интервале [0, 4*Pi].

2. **Целые и действительные корни:**
   Для уравнения (x^2 - 5)*(x^3 - 8)*(x^4 - 1)=0:

- Найдите все корни.
- Используя опции solve, найдите только целочисленные корни.
- Используя пакет RootFinding, подтвердите наличие всех действительных корней.

3. **Кусочная функция и ее свойства:**
   Дана функция:
   f(x) := piecewise(x < -1, x^3, x >= -1 and x < 2, 2*x + 1, x >= 2, 4 - x^2)

- Найдите все точки разрыва и корни функции.
- Решите неравенство f(x) > 0.
- Постройте график функции и отметьте на нем корни и точки разрыва.

Вариант 3: Комплексный анализ и специальные методы

1. **Комплексные корни и их представление:**
   Решите уравнение x^5 + x^3 + 1 = 0.

- Найдите все корни в аналитической форме.
- Вычислите численные значения всех корней с точностью до 10 знаков.

2. **Неявные функции и их графики:**
   Для системы уравнений:
   x^2 + y^2 = 4
   e^x + y = 1

- Докажите с помощью HasRealRoots, что система имеет действительные решения.
- Найдите все решения системы с точностью до 1e-8.
- Постройте график системы уравнений, отметив точки пересечения.

3. **Специальные функции и их нули:**
   Исследуйте уравнение tan(sin(x)) = 1:

- Используйте NextZero для нахождения первых 5 положительных корней.
- Определите период повторяемости корней этого уравнения.
- Постройте график функции tan(sin(x)) - 1 на интервале [0, 10].

Вариант 4: Параметрический анализ и оптимизация

1. **Уравнение с параметром:**
   Исследуйте уравнение x^3 - a*x + 1 = 0 в зависимости от параметра a:

- Определите, при каких значениях a уравнение имеет три действительных корня.
- Для a = 2, 3, 4 найдите все корни уравнения.
- Постройте график зависимости количества действительных корней от параметра a.

2. **Оптимальное решение неравенств:**
   Для системы неравенств:
   x^2 - 3*x - 5 < 0
   x^2 - 2*x + 4 > 0

- Найдите оптимальное решение (интервал или объединение интервалов).
- Определите, существует ли целочисленное решение данной системы.
- Решите систему для модифицированного второго неравенства: x^2 - 2*x + b > 0 при b = 1, 3, 5.

3. **Граничные значения и анализ:**
   Для функции f(x) = piecewise(x < 0, -x^2, x >= 0, x^2 + 1):

- Найдите все значения параметра a, при которых уравнение f(x) = a имеет:
  а) Одно решение
  б) Два решения
  в) Ни одного решения

Вариант 5: Продвинутые техники и верификация

1. **Сравнение методов решения:**
   Для уравнения `x^4 - 5*x^2 + 4 = 0`:
   - Решите аналитически с помощью `solve`.
   - Решите численно с помощью `fsolve`.
   - Используйте `RootFinding[Isolate]` для нахождения всех корней.
   - Сравните точность и скорость работы разных методов.
2. **Верификация решений:**
   Для уравнения `sqrt(x + 3) = x + 1`:
   - Найдите все решения.
   - Проверьте каждое решение подстановкой в исходное уравнение.
   - Объясните, почему одно из решений может быть посторонним.
   - Решите уравнение аналитически и покажите все этапы решения.
3. **Геометрическая интерпретация:**
   Для системы уравнений:
   `x^2/4 + y^2/9 = 1`
   `y = exp(-x)`
   - Докажите, что система имеет действительные решения.
   - Найдите все решения системы с точностью до `1e-6`.
   - Постройте график системы, выделив области существования решений.
   - Определите, сколько решений имеет система при добавлении параметра: `x^2/4 + y^2/9 = a`.