Фракталы

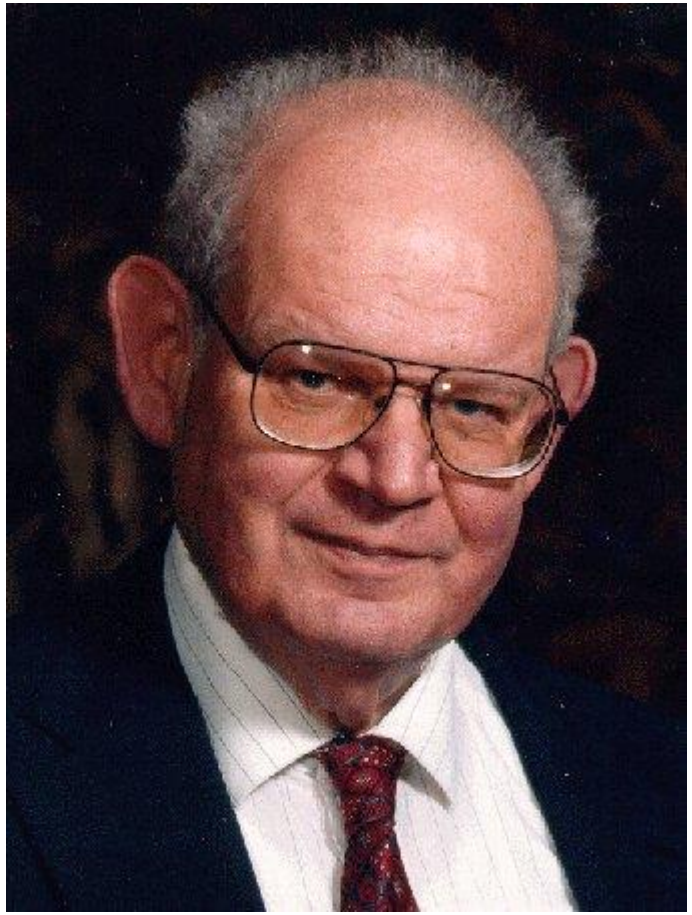


Компьютерная графика

Лектор: Демяненко Я.М.,
4-й курс ФИИТ, 2026

в компьютерной графике

Бенуа Мандельброт



1975 год

"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"

для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур

fractus в переводе означает **состоящий из фрагментов**

Фрактальная геометрия

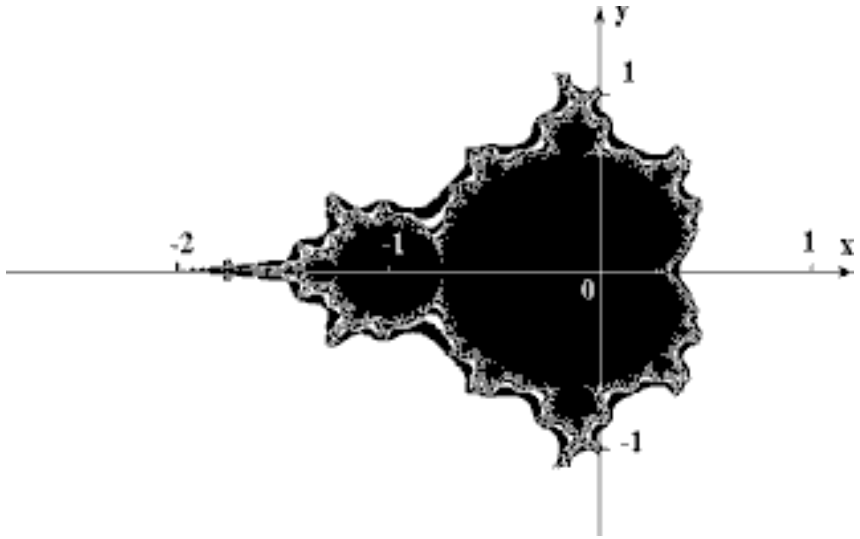
1977 год – книга Мандельброта

The Fractal Geometry of Nature

1875-1925 г г. – Пуанкаре, Фату, Жюлиа, Кантор, Хаусдорф

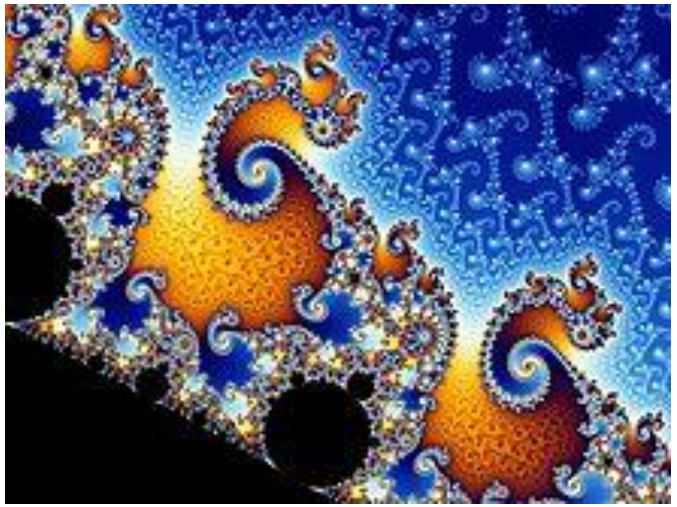
Впервые множество Мандельброта было описано в 1905 году Пьером Фату (Pierre Fatou), французским математиком,

Множество Мандельброта



Z[i+1]=Z[i]*Z[i]+C



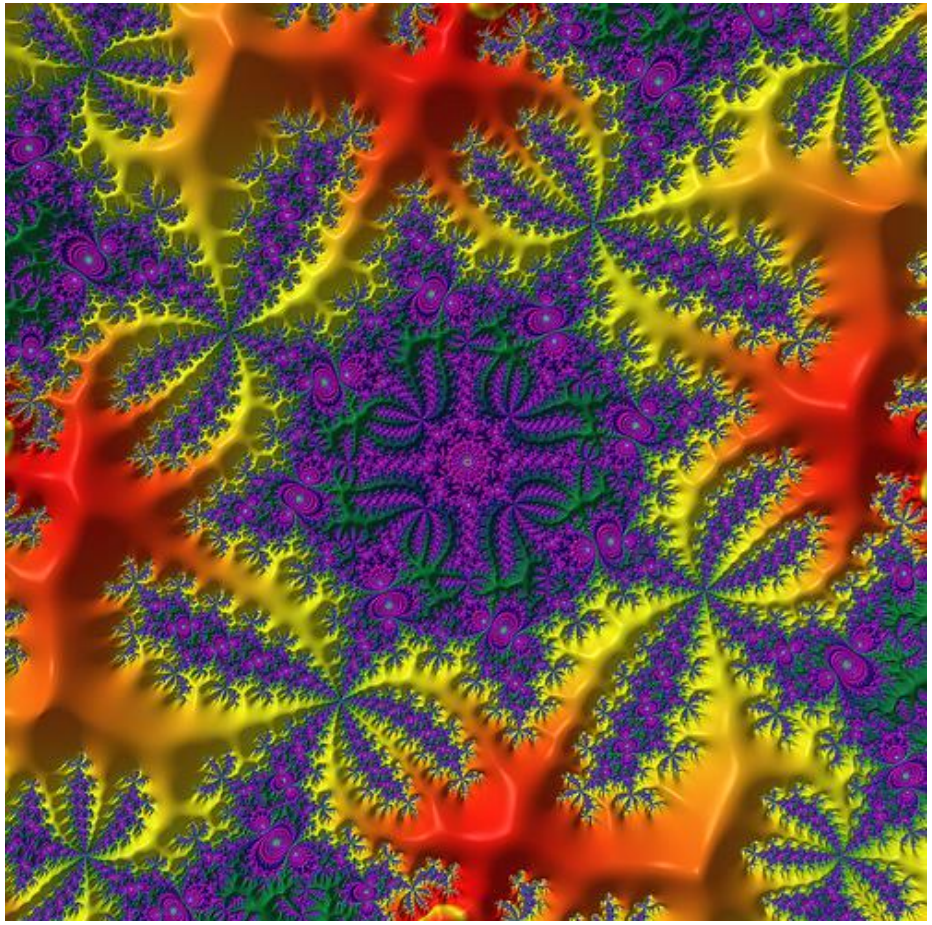


Классификация фракталов

- Геометрические фракталы
- Алгебраические фракталы
- Стохастические фракталы

Примеры фракталов

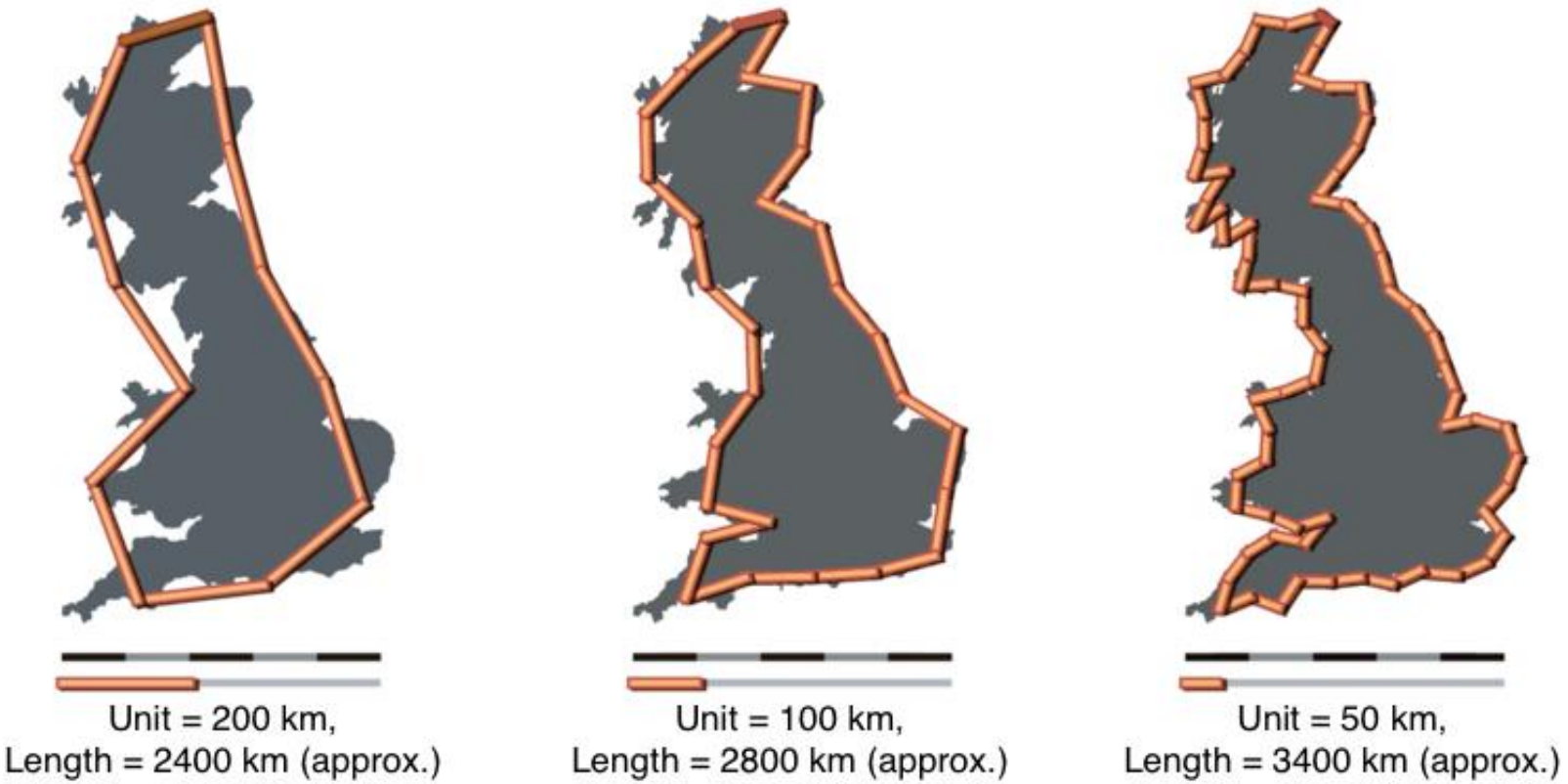




Береговая линия



Построение береговой линии



Болота



Горная система





Капуста

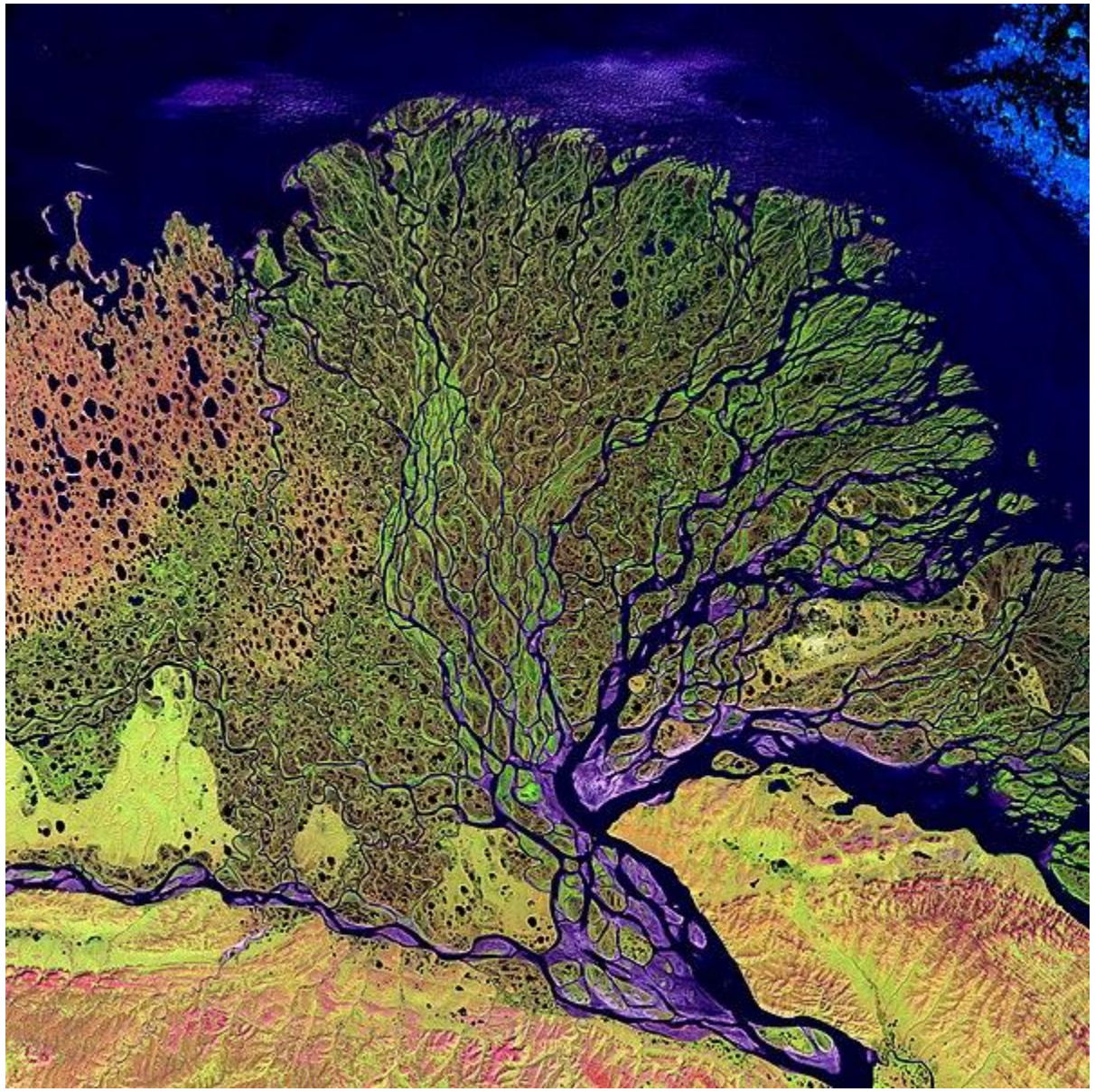




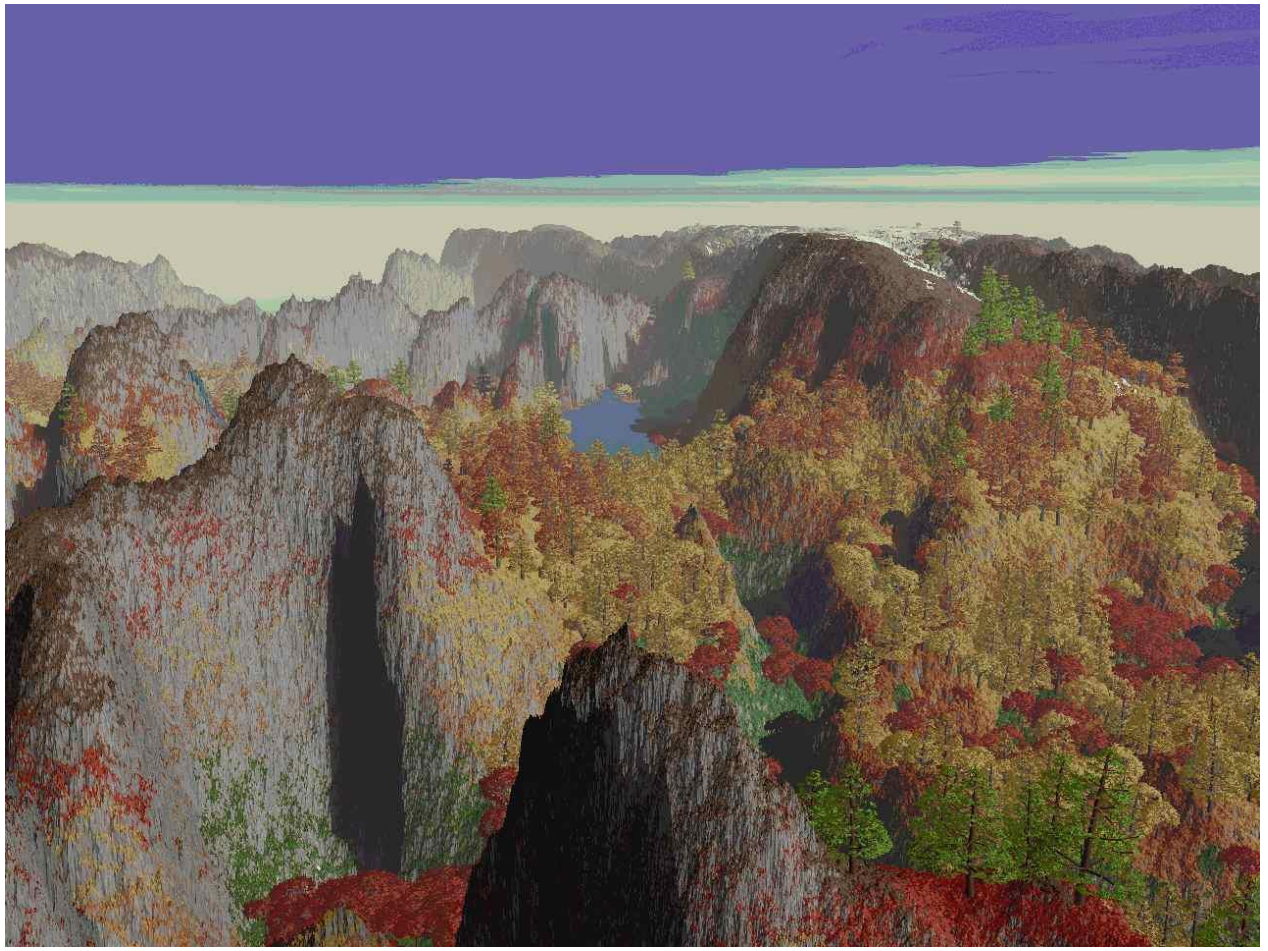
Листья



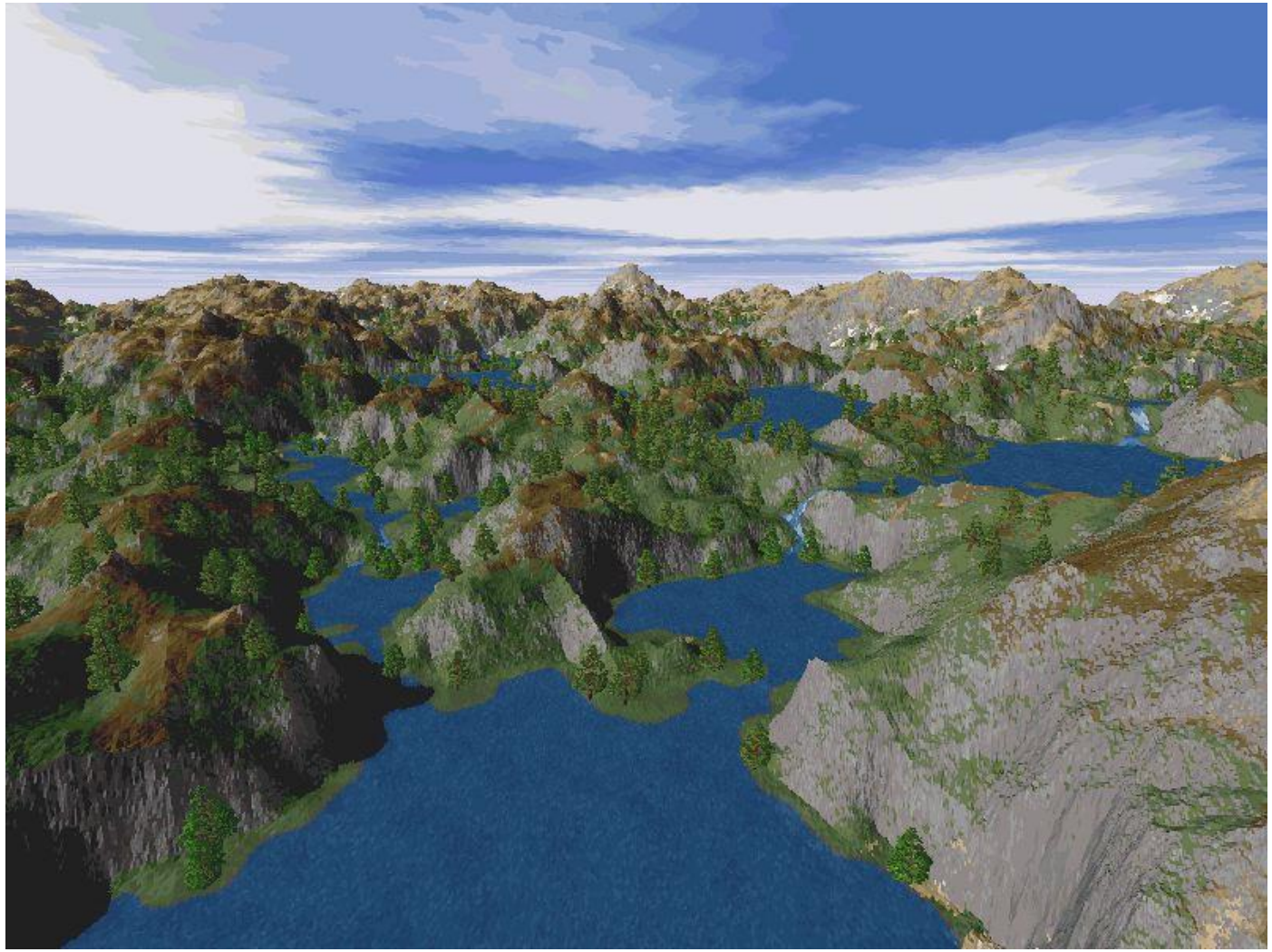
Дельта реки Лена



3D-пейзаж



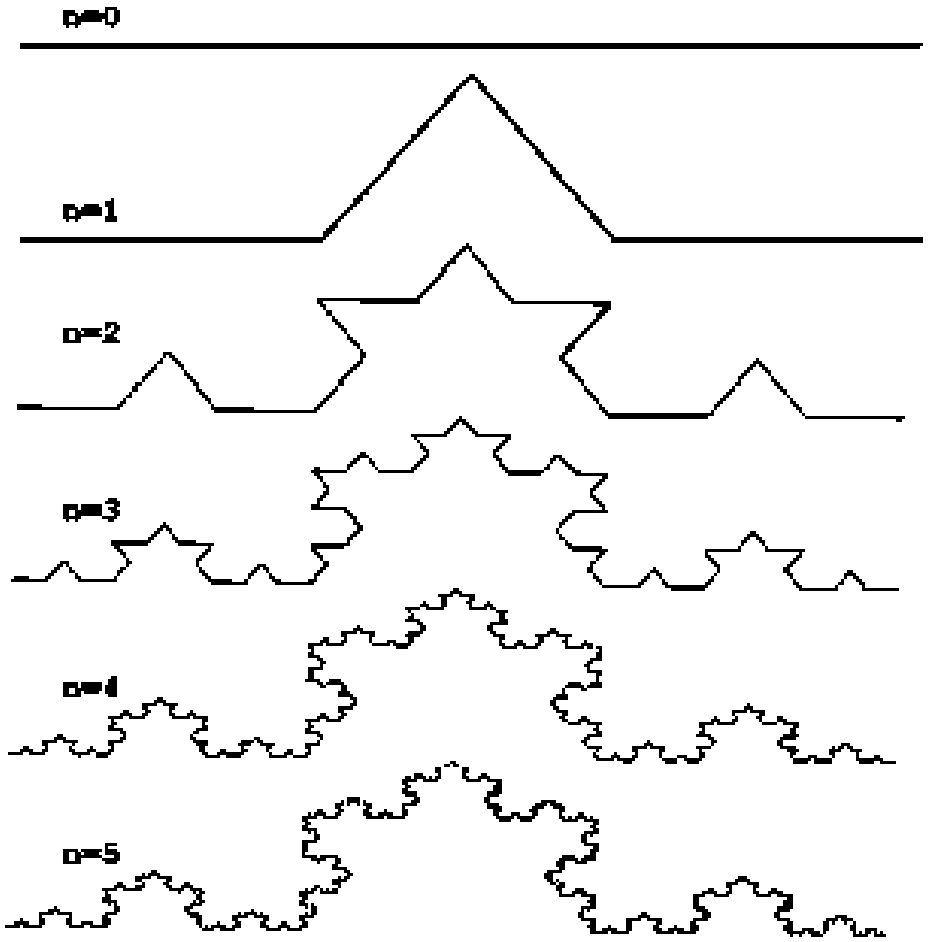
3D-пейзаж



3D-пейзаж



Построение триадной кривой Коха



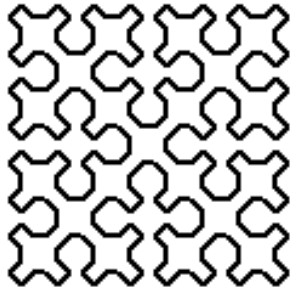
Ковер Серпинского



S_1 – «Ковер Серпинского» первого порядка

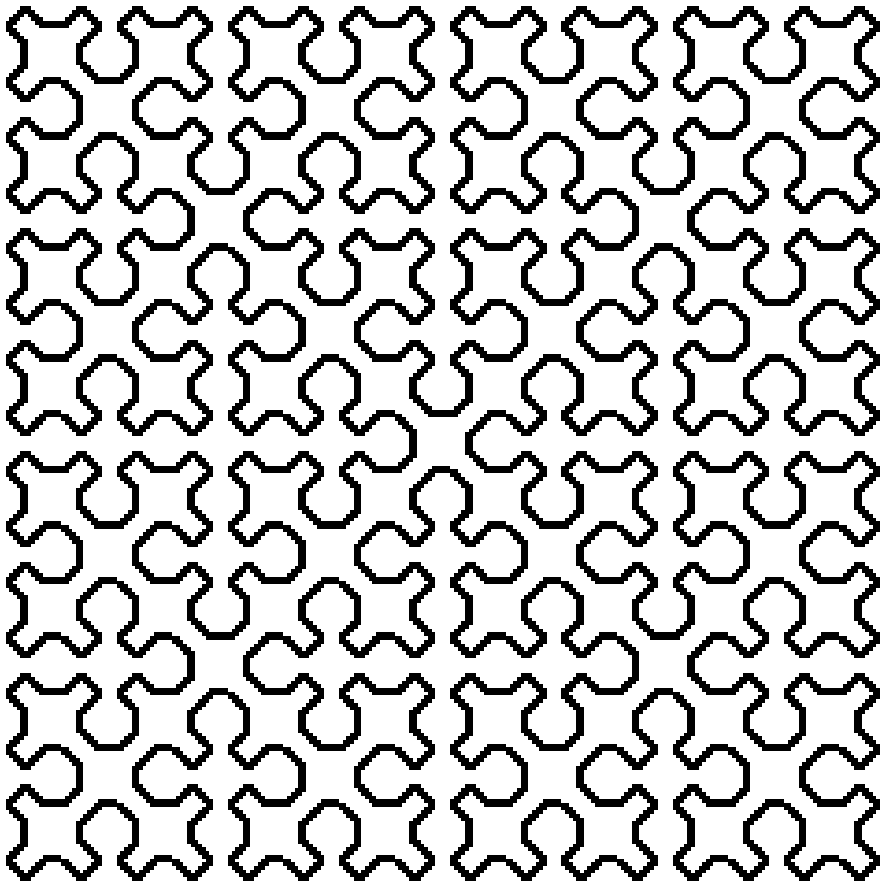


S_2 – «Ковер Серпинского» второго порядка

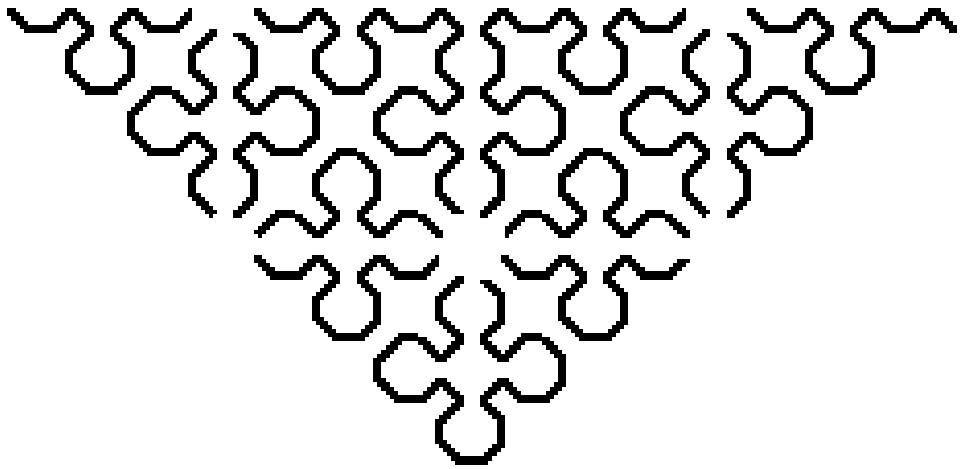


S_3 – «Ковер Серпинского» третьего порядка

S4 – «Ковер Серпинского» четвертого порядка



Составляющая A четвертого порядка



Рекуррентные соотношения

S_0: A ↘ B ↙ C ↖ D ↗ .

S_i: для $i > 0$ A, B, C, D строятся следующим образом:

A: A ↘ B → D ↗ A

B: B ↙ C ↓ A ↘ B

C: C ↖ D ← B ↙ C

D: D ↗ A ↑ C ↖ D

```
var a, b, x, y, n: integer;

procedure lrel (dx,dy: integer);
begin
  x:=x+dx; y:=y+dy;
  LineTo(x,y)
end;

procedure BB(k: integer);
procedure CC(k: integer);
procedure DD(k: integer);
```

```
procedure AA(k: integer);
begin
  if k>0 then
  begin
    AA(k-1); lrel(a,b);
    BB(k-1); lrel(a,0);
    DD(k-1); lrel(a,-b);
    AA(k-1)
  end
end;
```

```
procedure BB(k: integer);
begin
  if k>0 then
  begin
    BB(k-1); lrel(-a,b);
    CC(k-1); lrel(0,b);
    AA(k-1); lrel(a,b);
    BB(k-1)
  end
end;
```

```
procedure CC(k: integer);
begin
  if k>0 then
  begin
    CC(k-1); lrel(-a,-b);
    DD(k-1); lrel(-a,0);
    BB(k-1); lrel(-a,b);
    CC(k-1)
  end
end;
```

```
procedure DD(k: integer);
begin
  if k>0 then
  begin
    DD(k-1); lrel(a,-b);
    AA(k-1); lrel(0,-b);
    CC(k-1); lrel(-a,-b);
    DD(k-1)
  end
end;
```

```
begin
  n:=6;                          {порядок кривой}
  a:=3; b:=a;                    {длины сторон}
  x:=10; y:=10;       {координаты начальной точки}
  SetWindowCaption('Ковер Серпинского');
  SetWindowSize(590,590);
  MoveTo(x,y);
  AA(N); lrel(a,b);
  BB(N); lrel(-a,b);
  CC(N); lrel(-a,-b);
  DD(N); lrel(a,-b)
end.
```

Системы построения фрактальных изображений

- Iterated function systems (IFS) — Системы итерируемых функций, итерированных функций, повторяющихся функций

- L-системы

Метод IFS

середина 80-х годов

Наиболее простая версия IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$X1=A*X+B*Y+C$

$Y1=D*X+E*Y+F$

Также для построения IFS применяют

проективные:

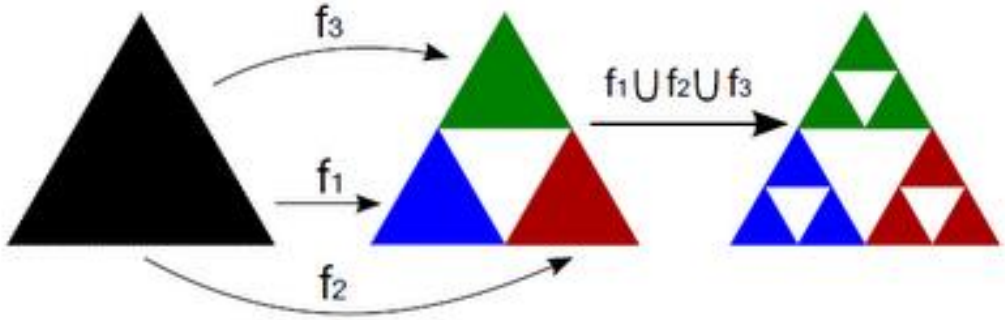
$$X1=(A1*X+B1*Y+C1)/(D1*X+E1*Y+F1)$$
$$Y1=(A2*X+B2*Y+C2)/(D2*X+E2*Y+F2)$$

или квадратичные:

$$X1=A1*X*X+B1*X*Y+C1*Y*Y+D1*X+E1*Y+F1$$
$$Y1=A2*X*X+B2*X*Y+C2*Y*Y+D2*X+E2*Y+F2$$

преобразования на плоскости.

Пример построения треугольника Серпинского с помощью IFS



$$f_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f_3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}$$

L-системы (Lindenmayer System)

В 1968г. Венгерский биолог и ботаник Аристид Линденмайер



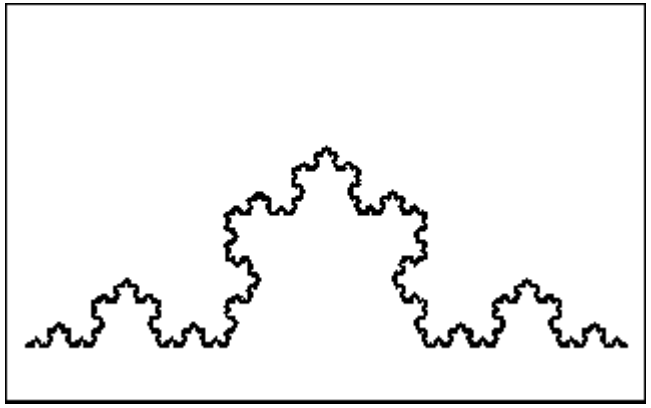
Простейшие L-системы
Растения и ветвящиеся структуры
Стохастические L-системы
Контекстно-зависимые L-системы
Параметрические L-системы

Детерминированная контекстонезависимая L-система

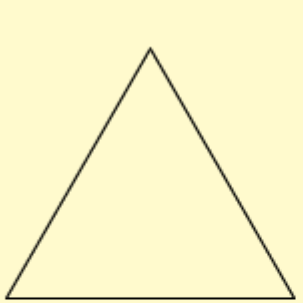
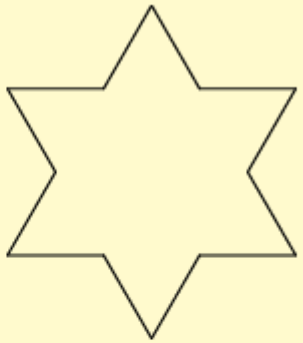
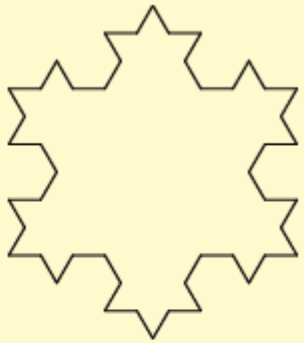
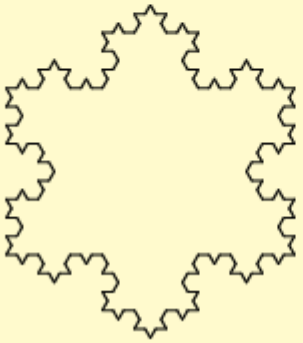
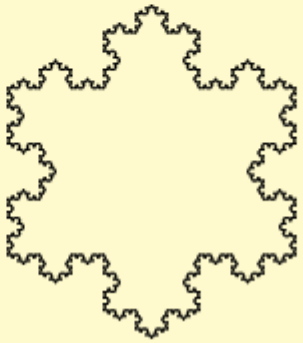
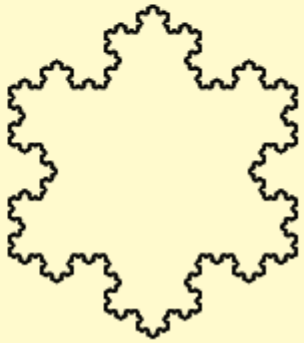
- алфавит, аксиомы и множества правил

КРИВАЯ КОХА

- F
- F→F−F++F−F
- 60º



Поколения снежинки Коха

поколения	изображения		
0, 1, 2			
3, 4, 5			

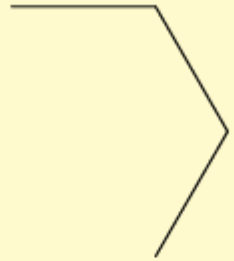
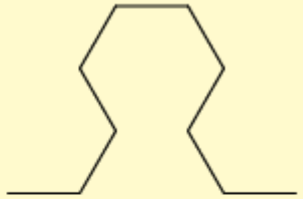
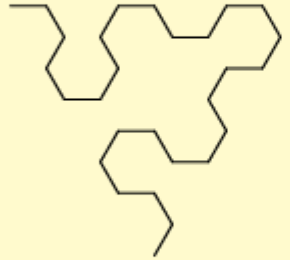
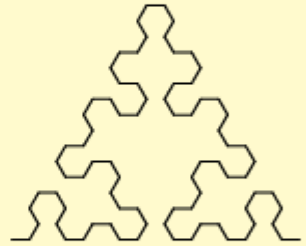
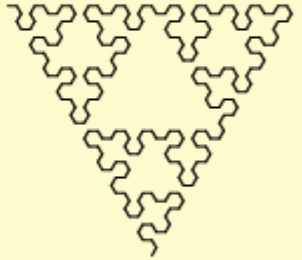
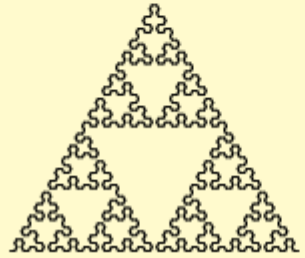
аксиома	правило
「F++F++F」	「F」→「F-F++F-F」

Квадратный остров Коха

- F+F+F+F
- F→F+F−F−FF+F+F−F
- 90º

Ковер Серпинского

- FXF−−FF−−FF
- F→FF
- X→−−FXF++FXF++FXF−−
- 60º

поколения	изображение		
0, 1, 2			
3, 4, 5			
6, 7, 8			

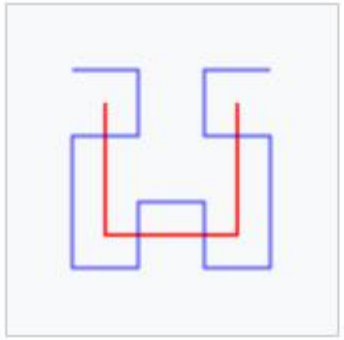
Наконечник Серпинского

- YF
- F→F
- X→YF+XF+Y
- Y→XF−YF−X
- 60º

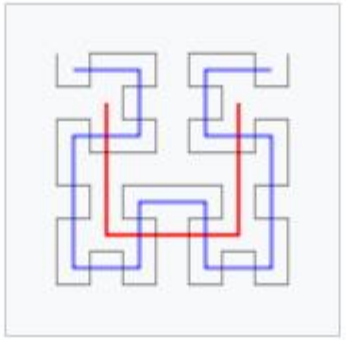
Кривая Гильберта



Кривая Гильберта, первый шаг



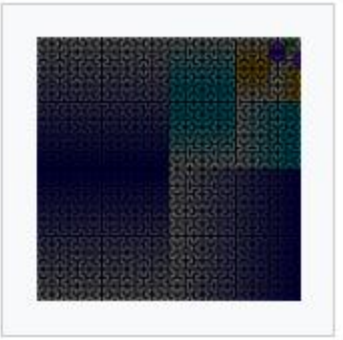
Кривые Гильберта, первый и второй шаги



Кривые Гильберта, с первого по третий шаги



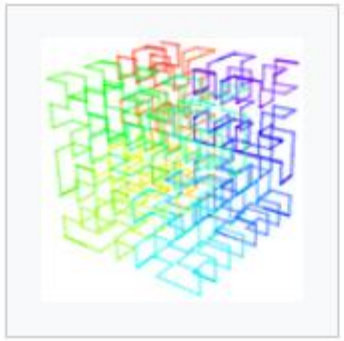
Ниточная графика



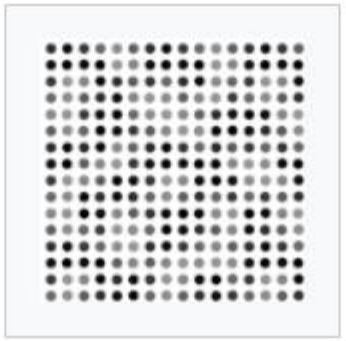
Кривая Гильберта в цвете



Трёхмерная кривая Гильберта



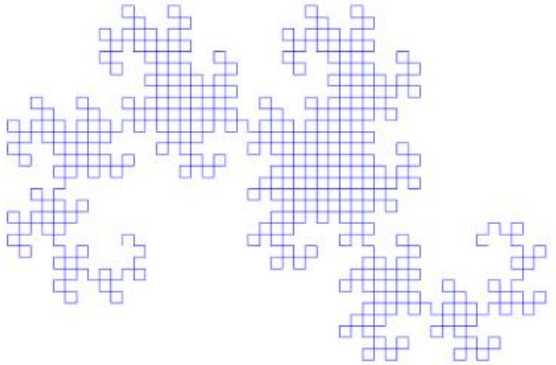
Трёхмерная кривая Гильберта в цвете, указывающем последовательность

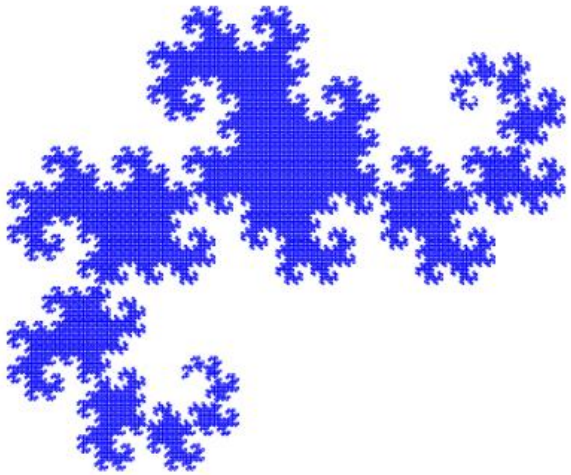


Анимационная иллюстрация, показывающая прохождение кружков по кривой.

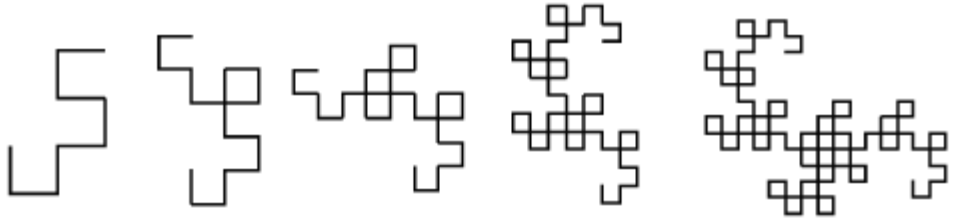
- X
- F→F
- X→−YF+XFX+FY−
- Y→+XF−YFY−FX+
- 90º

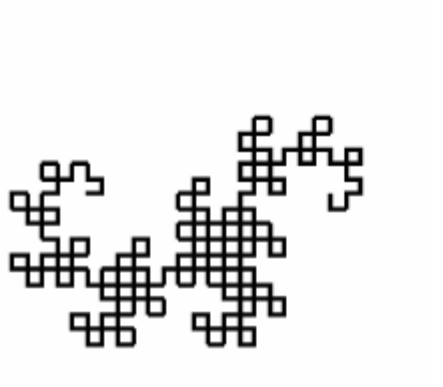
Кривая дракона Хартера-Хейтуэя

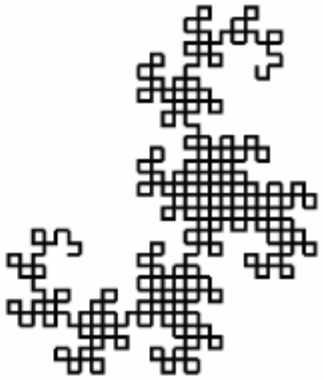




- X
- F→F
- X→X+YF+
- Y→−FX−Y
- 90º

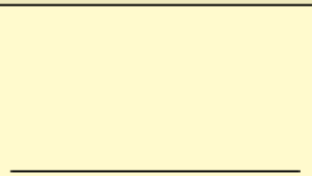
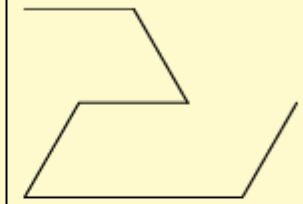
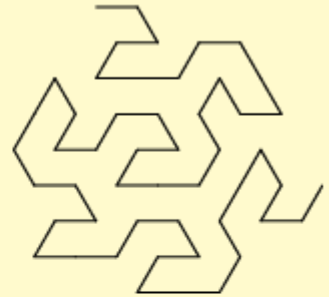
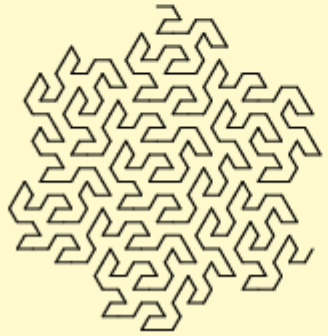
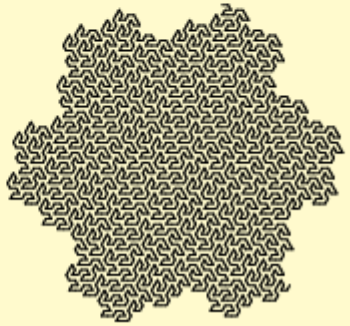
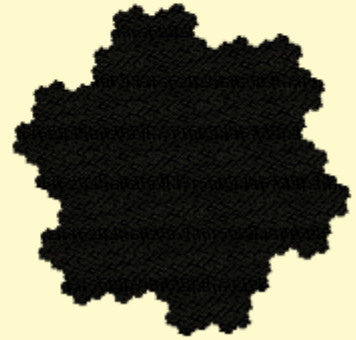




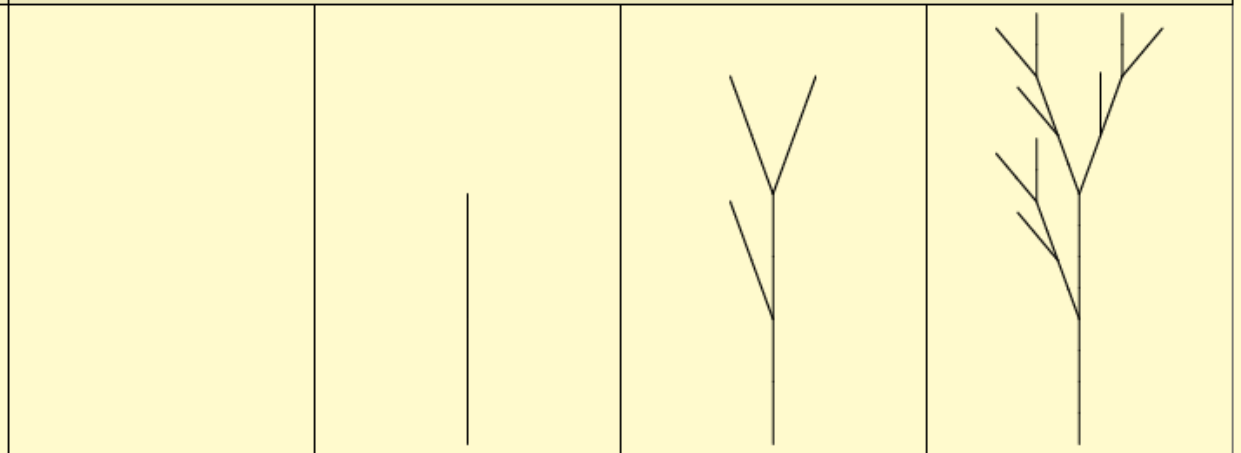
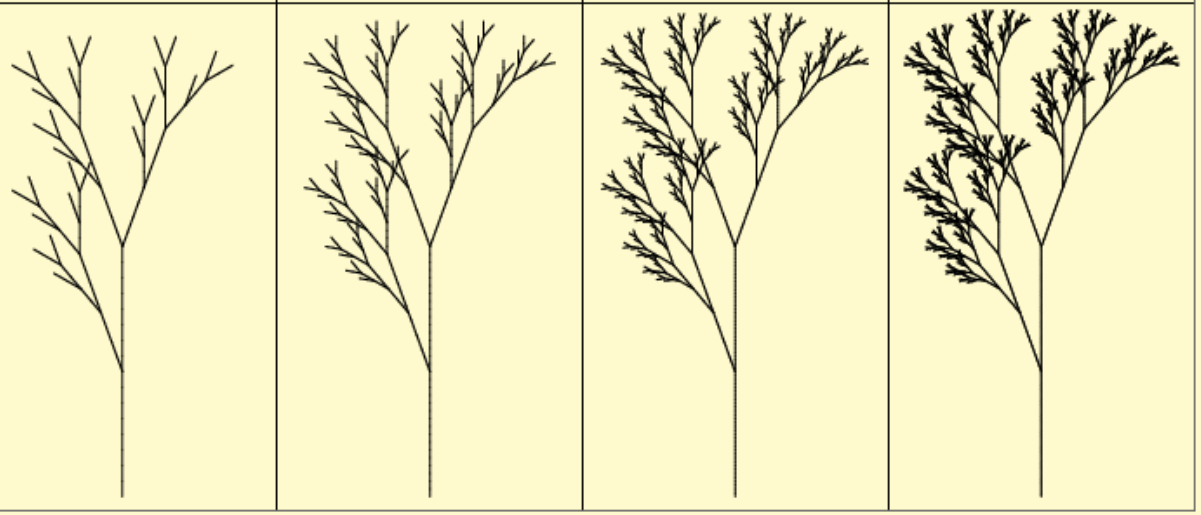


Шестиугольная кривая Госпера

- XF
- F→F
- X→X+YF++YF−FX−−FXFX−YF+
- Y→−FX+YFYF++YF+FX−−FX−Y
- 60º

поколения	изображение		
0, 1, 2			
3, 4, 5			

Скобочные L-системы и деревья

поколения	изображение
0, 1, 2, 3	
4, 5, 6, 7	

Скобочные L-системы и деревья

аксиома	правила	интерпретация
「X」	「F」→「FF」 「X」→「F[+X]F[-X]+X」	「F」→‹**FORWARD** 1› 「+」→‹**ROTATE** 20› 「-」→‹**ROTATE** -20› 「[」→‹**SAVE**› 「]」→‹**RESTORE**›

Куст 1

- F
- F→FF−[−F+F+F]+[+F−F−F]
- 22º

Куст 2

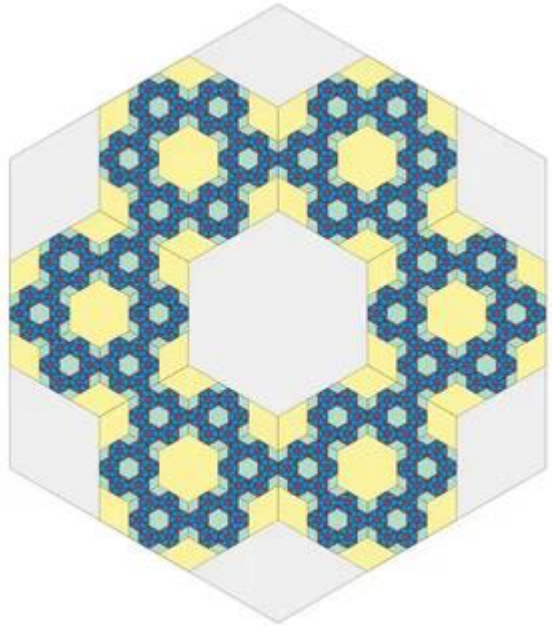
- X
- F→FF
- X→F[+X]F[−X]+X
- 20º

Куст 3

- X
- F→FF
- X→F−[[X]+X]+F[+FX]−X
- 22.5º

Шестиугольная мозаика

- X
- F→F
- X→[−F+F[Y]+F][+F−F[X] −F]
- Y→[−F+F[Y]+F][+F−F−F]
- 60º



L-системы образуют реальные модели растений



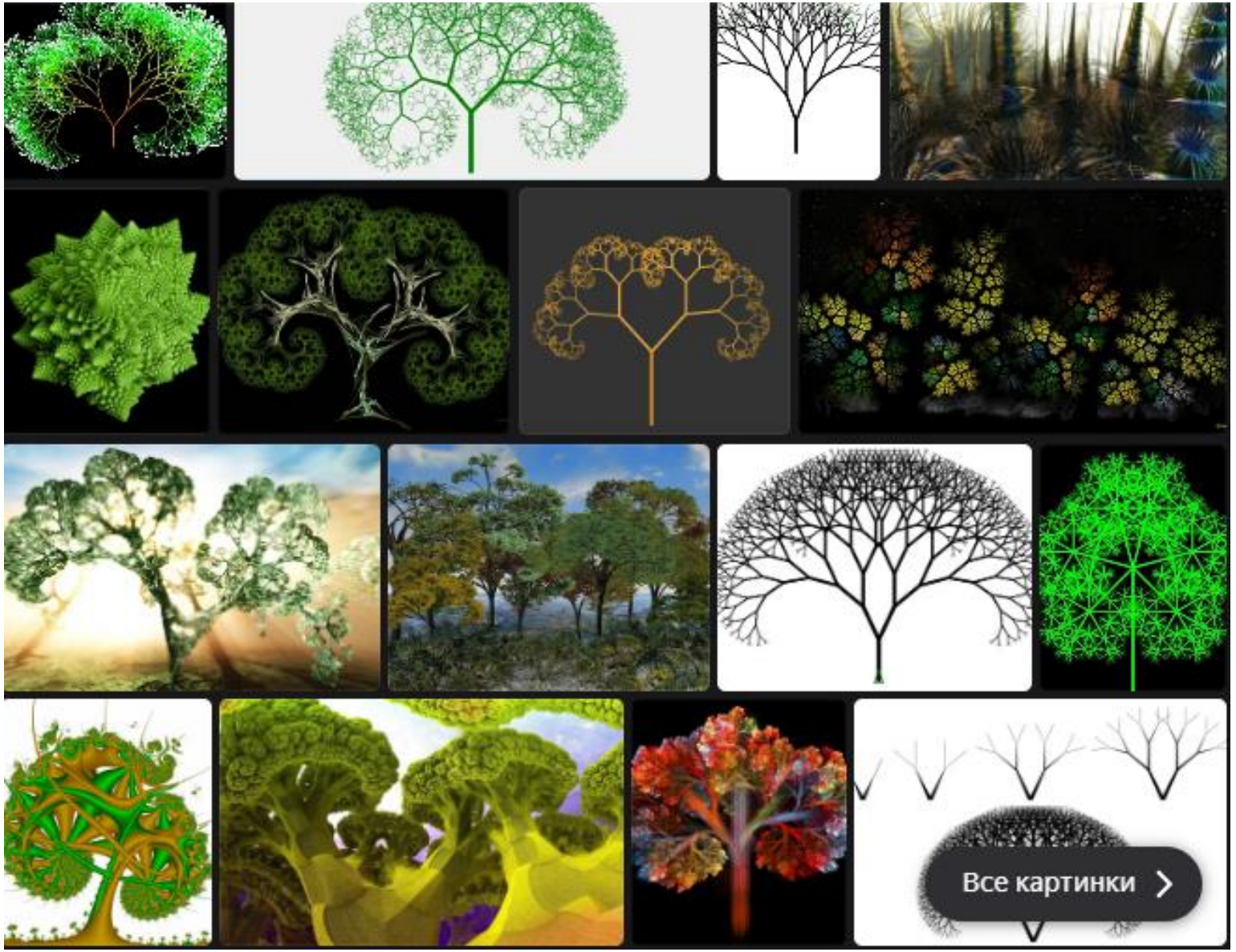




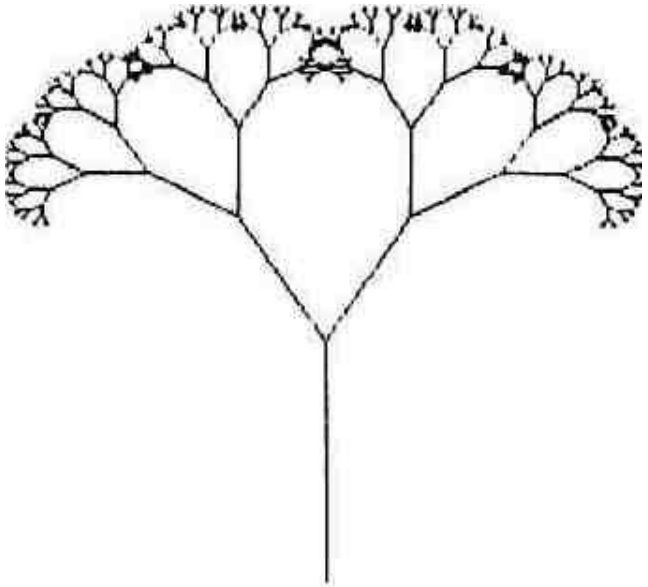


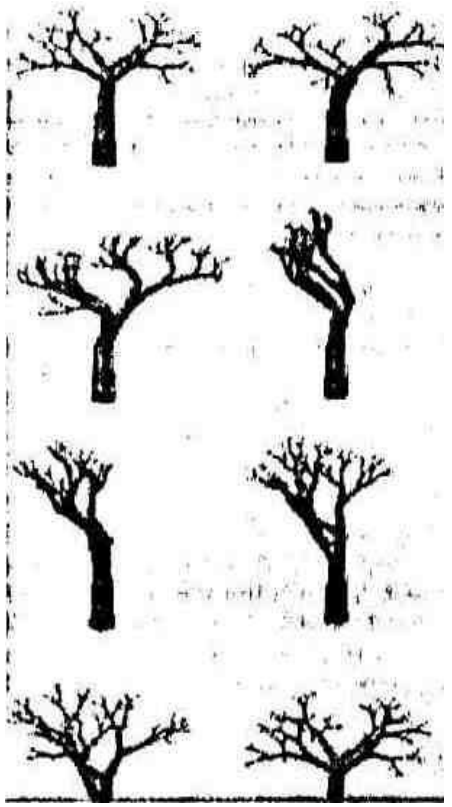





Все картинки

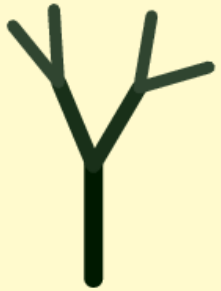
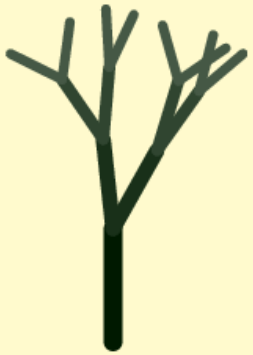
Пример построения дерева с помощью L – системы

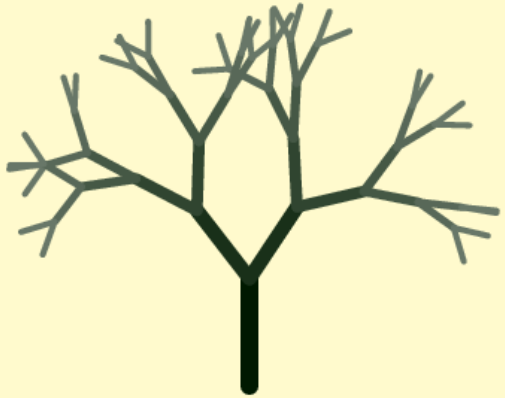


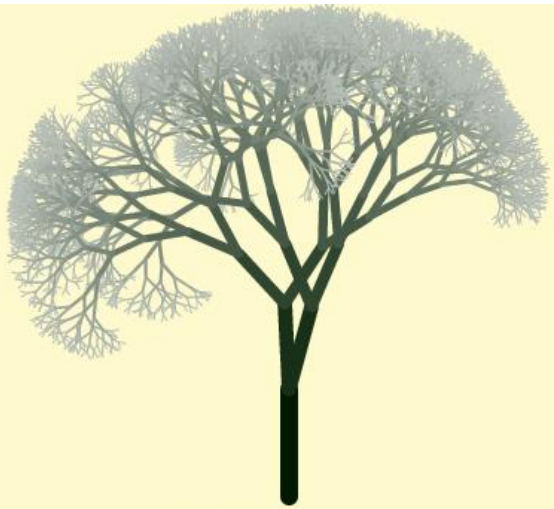
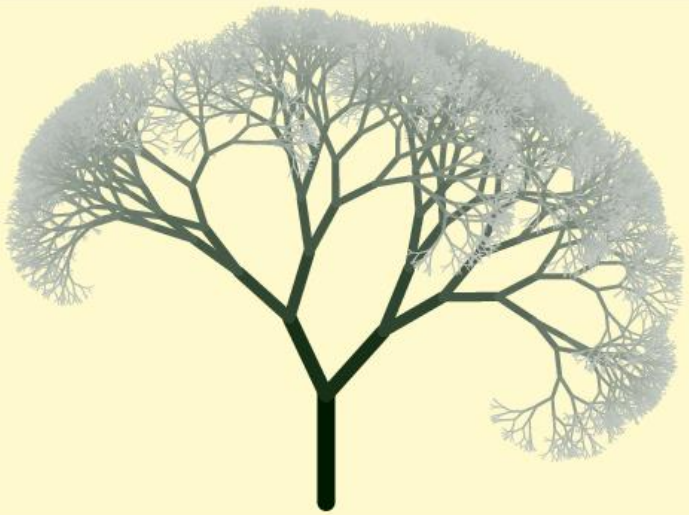


Добавим случайность в дерево

аксиома	правило	интерпретация
⌜X⌟	⌜X⌟ → ⌜F[@[-X]+X]⌟	⌜F⌟ → ‹**FORWARD** 1› ⌜X⌟ → ‹**FORWARD** 1› ⌜+⌟ → ‹**ROTATE** RANDOM 45› ⌜-⌟ → ‹**ROTATE** -RANDOM 45› ⌜[⌟ → ‹**SAVE**› ⌜]⌟ → ‹**RESTORE**› ⌜@⌟ → ‹**…**›

поколения	изображение
0	
1	
2	
3	

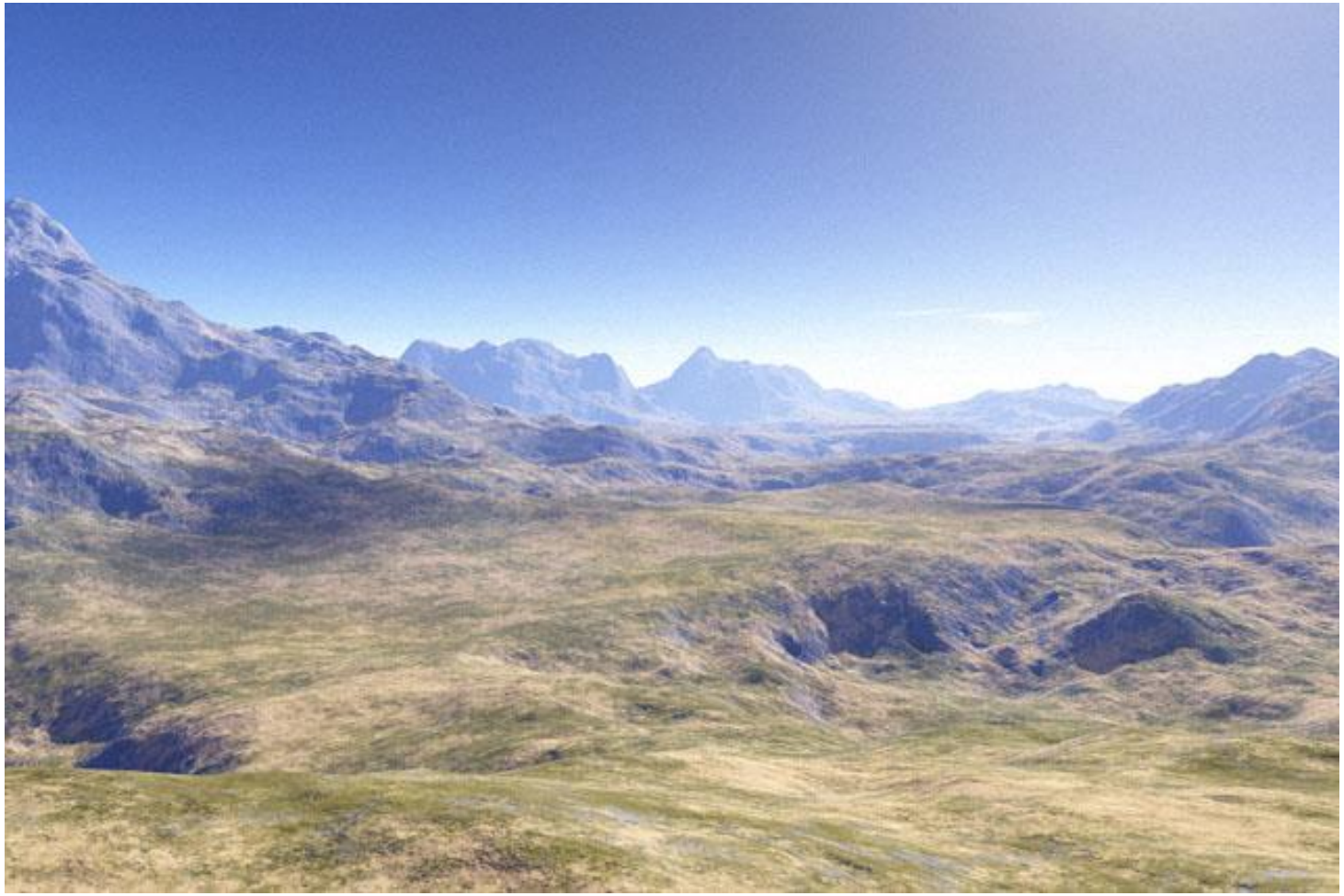
4	
5	
6	

12	
13	

Фракталы в природе повсюду



Сгенерированная компьютером фрактальная поверхность



И это тоже сгенерировано компьютером



Фрактальная поверхность (Fractal landscape)

- Поверхность, сгенерированная с использованием стохастического алгоритма, предназначенного для создания фрактального объекта, который имитирует внешний вид природной местности.
- Иными словами, фрактальная поверхность появляется не в результате жестко заданной процедуры, а, является, скорее, случайным объектом, обладающим свойствами фрактала.

Википедия

Использование в киноиндустрии

- Первым использованием в киносъёмках пейзажа, сгенерированного компьютером, стал фильм 1982 года Звёздный путь 2: Гнев Хана.

- Американский исследователь компьютерной графики Лорен Карпентер использовал усовершенствованные методы Мандельброта для моделирования инопланетного ландшафта

Общий план действий

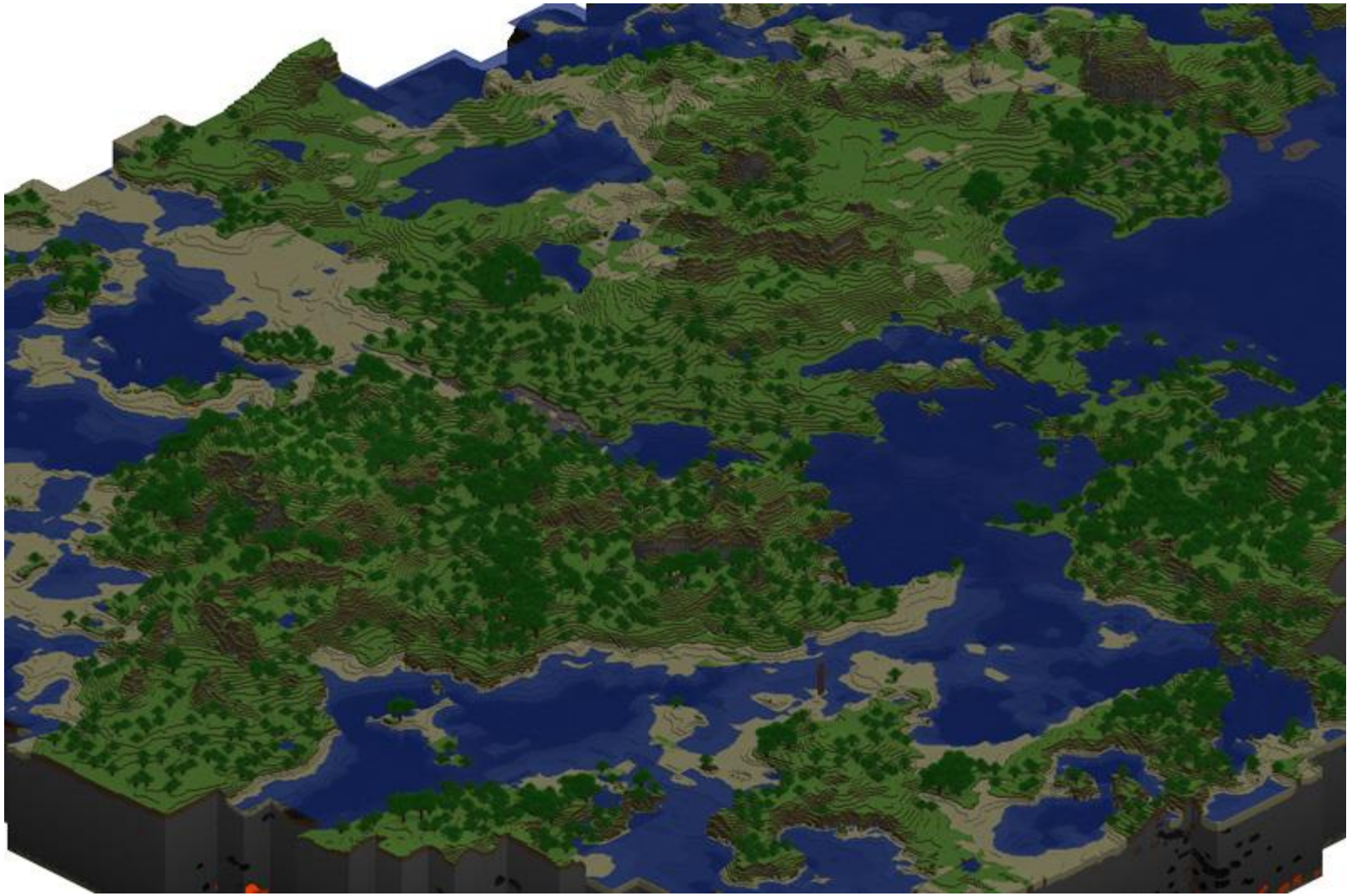
- Создание карты высот
- Распределение биомов
- Запуск водной эрозии
- Дополнительные действия

Уровень высоты	Влажность					
	6 (влажно)	5	4	3	2	1 (сухо)
4 (высоко)	СНЕГ			ТУНДРА	ПУСТОШЬ	СУХАЯ ЗЕМЛЯ
3	ТАЙГА		КУСТАРНИКИ		УМЕРЕННАЯ ПУСТЫНЯ	
2	УМЕРЕННЫЙ ДОЖДЛИВЫЙ ЛЕС	УМЕРЕННЫЙ ЛИСТВЕННЫЙ ЛЕС		ТРАВА		УМЕРЕННАЯ ПУСТЫНЯ
1 (низко)	ТРОПИЧЕСКИЙ ДОЖДЛИВЫЙ ЛЕС		ТРОПИЧЕСКИЙ СЕЗОННЫЙ ЛЕС		ТРАВА	СУБТРОПИЧЕСКАЯ ПУСТЫНЯ

Способы построения карты высот

- Заполнение карты высот случайным образом
- Создание холмов «вручную»
- Алгоритм diamond-square
- Ландшафт на базе диаграммы Вороного

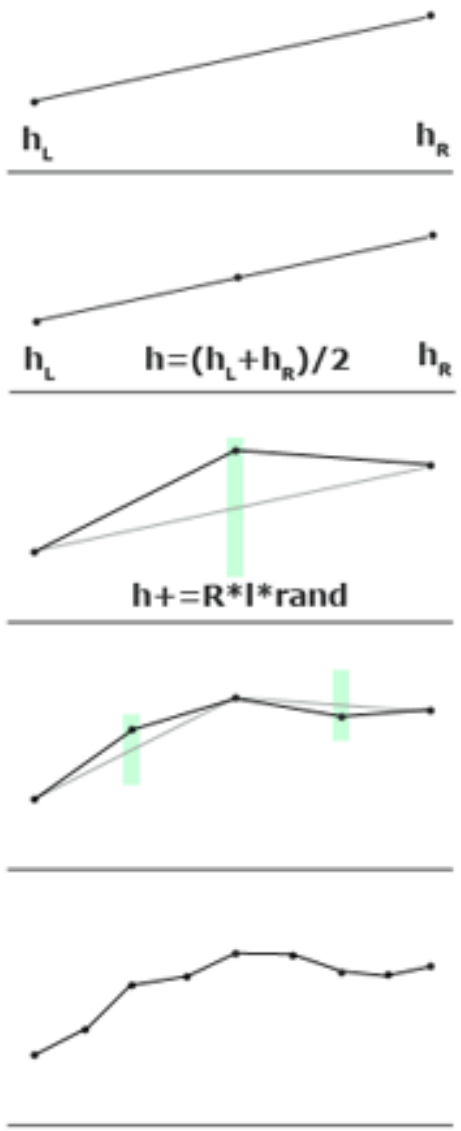
Ландшафт в Minecraft



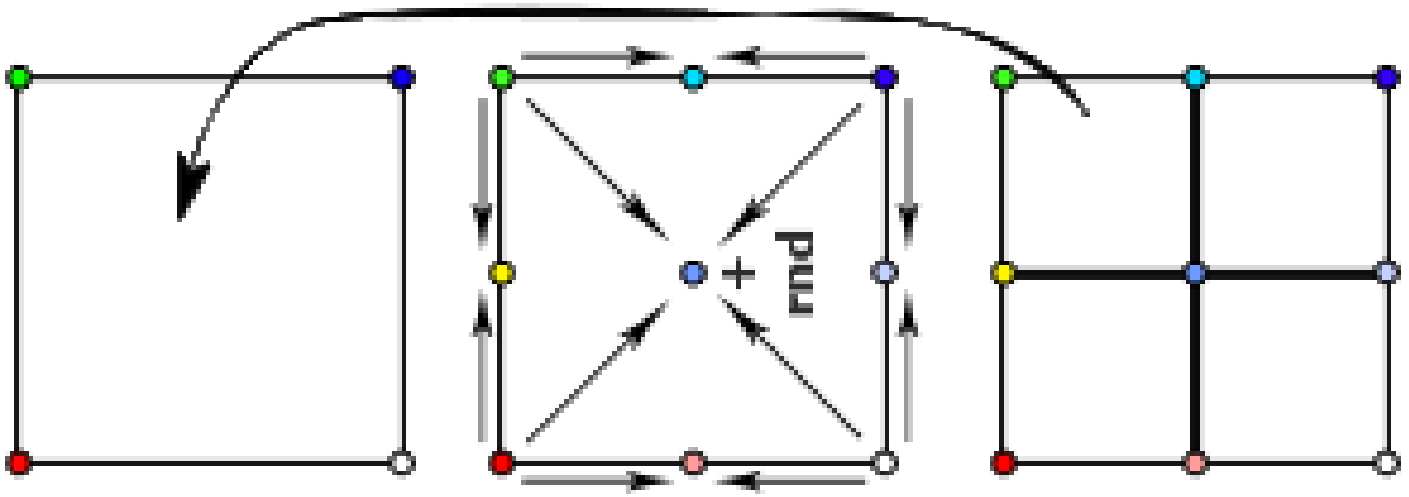
Алгоритм diamond-square (2D) или midpoint displacement



$h = (hL + hR) / 2 + \text{random}(-R * L, R * L)$
(*hL* и *hR* — высоты на левом и правом конце отрезка, а константа *R* определяет «шероховатость» получающейся ломаной, L – длина разбиваемого отрезка



Алгоритм midpoint displacement

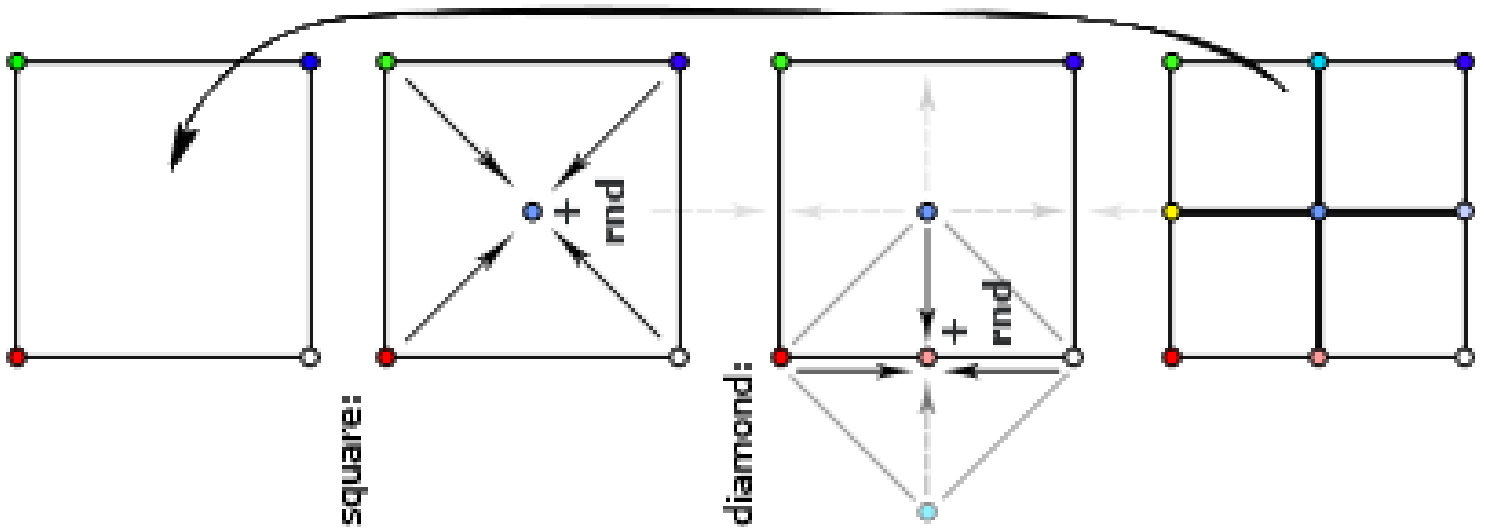


Недостатки алгоритма midpoint displacement

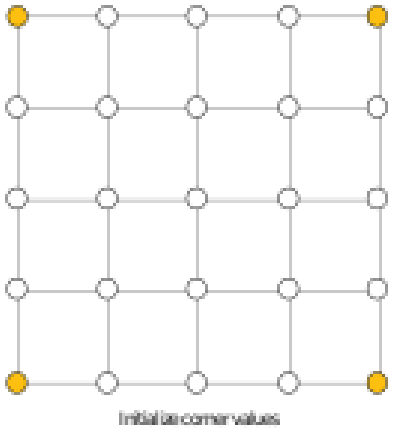
- Идея была впервые представлена Фурнье, Фусселлом и Карпентером на SIGGRAPH 1982.

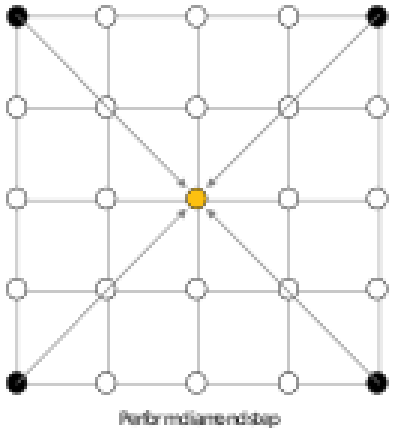
- Позднее он был проанализирован Гавином С. П. Миллером в SIGGRAPH 1986, который описал его как ошибочный – алгоритм производит заметные вертикальные и горизонтальные «складки» из-за значительных возмущений, происходящих в прямоугольной сетке.

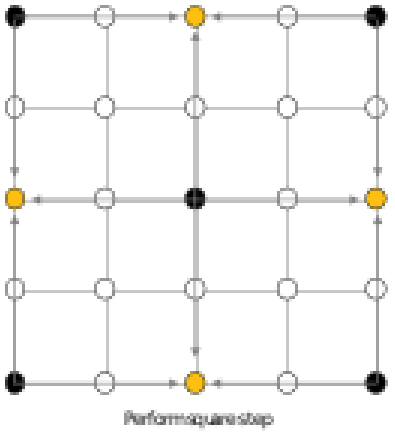
Алгоритм diamond-square

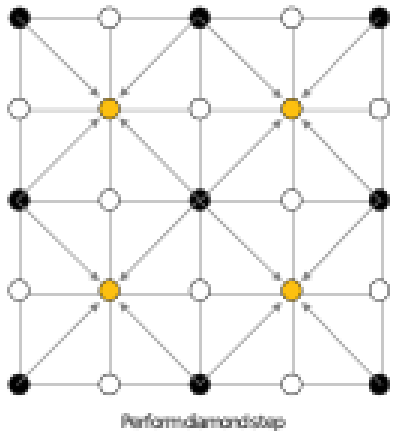


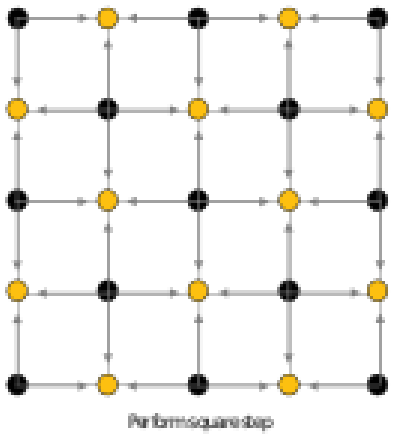
Алгоритм diamond-square (3D)



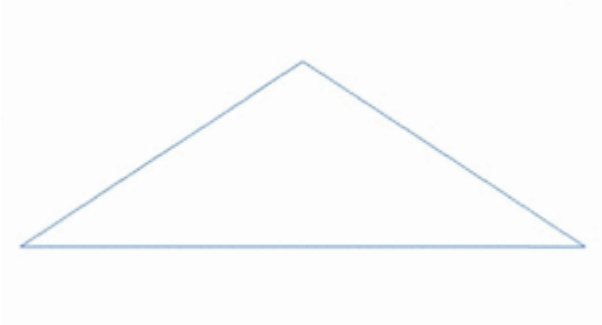




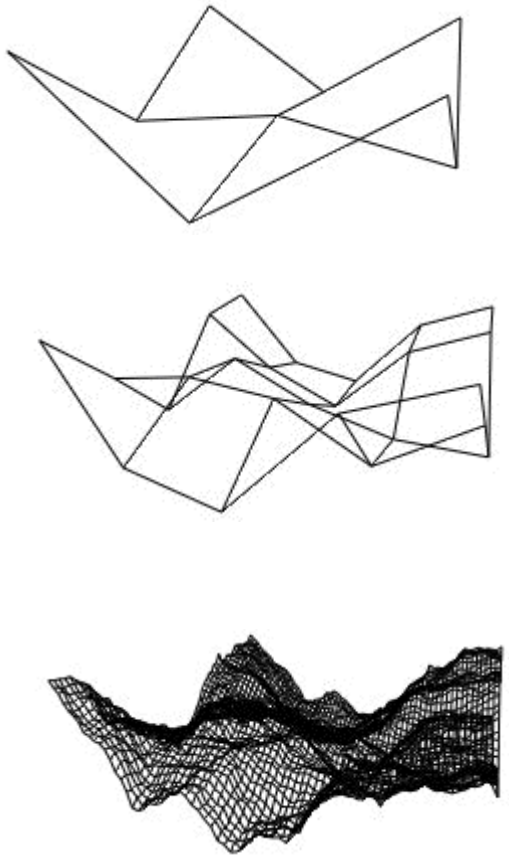


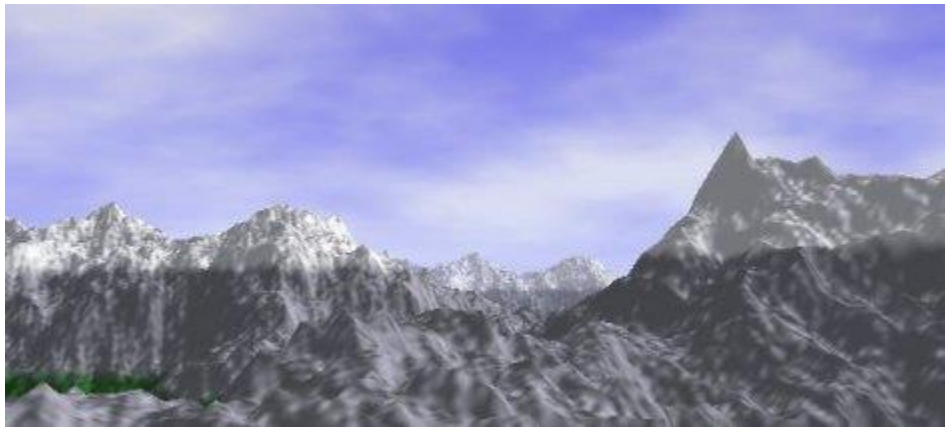


Модификация алгоритма



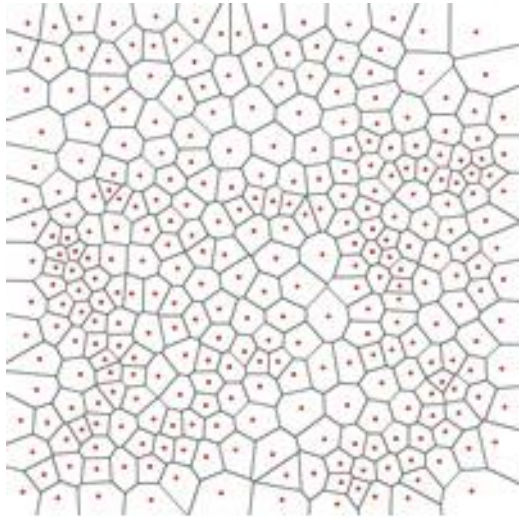
Алгоритм diamond-square (3D)





Terragen

Ландшафт на базе диаграммы Вороного





Главное свойство сетки— это её нерегулярность.

Ландшафт не выглядит слишком «квадратным».

Ландшафт на базе диаграммы Вороного

- Случайное бросание точек на карту.
- Затем по этим точкам строится диаграмма Вороного и/или триангуляция Делоне.
- На ней выполняется несколько итераций релаксации Ллойда, чтобы избавиться от слишком мелких полигонов.

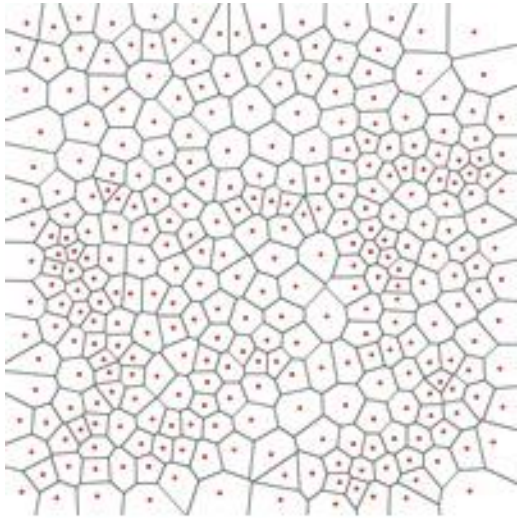


Диаграмма Вороного



Георгій Феодосійович Вороний; 1868 — 1908

Названа в честь российского учёного Георгия Феодосьевича Вороного.

Также известна как:

мозаика Вороного, разбиение Вороного, разбиение Дирихле

Диаграмма Вороного

- Диаграмма Вороного конечного множества точек S на плоскости представляет такое разбиение плоскости, при котором каждая область этого разбиения образует множество точек, более близких к одному из элементов множества S, чем к любому другому элементу множества

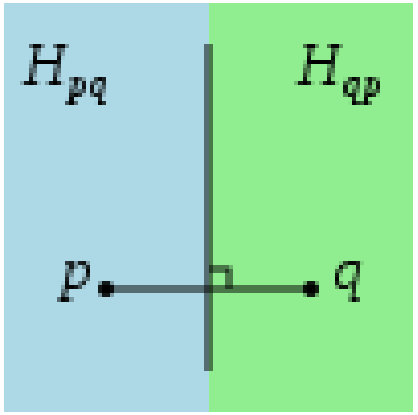


Диаграмма Вороного и триангуляция Делоне

