Пакеты научных вычислений

Лекция 4

Математический анализ в Maple

Команды прямого и отложенного действия. Вычисление пределов и производных.

Исследование функций.

Разложение в ряд и аппроксимация функций.

Сумма и произведение ряда.

Наложение ограничений. Интегрирование



Наседкина А. А.

Общие сведения

- Команды прямого и отложенного действия

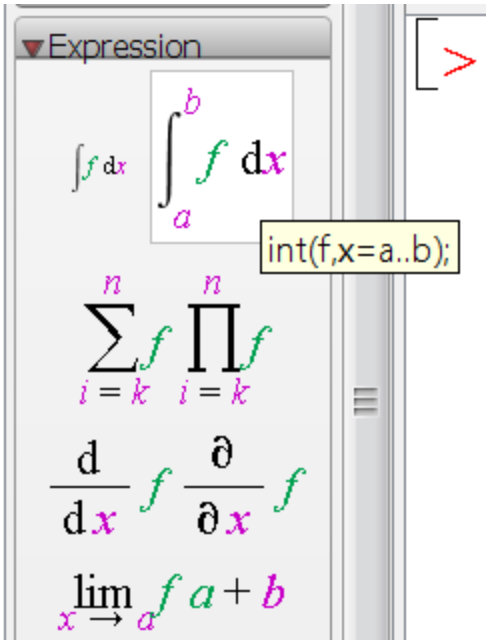
Команды прямого и отложенного действия

- Для таких математических операций, как вычисление предела, производной, интеграла, суммы ряда и некоторых других операций, существуют две формы записи: **активная** (команда прямого действия) и **инертная** (команда отложенного действия)
- **Команды прямого действия** начинаются с маленькой буквы и выполняются сразу
- **Команды отложенного действия** начинаются с большой буквы и служат для записи операции в математическом виде.
  Для их выполнения используется команда **value**.

Некоторые команды с двумя формами записи

diff и **Diff**	**int** и **Int**
limit и **Limit**	**normal** и **Normal**
product и **Product**	**sum** и **Sum**

- Шаблоны на панели Expression являются командами прямого действия



Примеры команд прямого и отложенного действия

Шаблон с палитры Expression (в режиме ввода Math mode)

$$> \int_0^{\pi} (1+\cos(x))^2 \, dx$$

$$\frac{3}{2}\pi$$

Команда прямого действия

$$> int((1+\cos(x))^2, x=0..\mathrm{Pi})$$

$$\frac{3}{2}\pi$$

Команда отложенного действия

$$> Int((1+\cos(x))^2, x=0..\pi); value(\%)$$

$$\int_0^{\pi} (1+\cos(x))^2 \, dx$$

$$\frac{3}{2}\pi$$

В режиме ввода Text mode

```
> Limit(x*(Pi/2+arctan(x)),x=-infinity)=limit(x*(Pi/2+arctan(x)),
  x=-infinity);
```

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\frac{1}{2}\pi + \arctan(x)\right) = -1$$

Вычисление пределов и производных

- Вычисление пределов
- Дифференцирование функции одной переменной
- Дифференцирование функции многих переменных
- Дифференциальный оператор

Вычисление пределов

- **limit(f, x=a)**

  limit(f, x=a, dir)

  $\lim_{x \to a} f$

  a – точка предела, в том числе может быть **infinity** или **–infinity**

  dir – вид предела: **left** (предел слева), **right** (предел справа), **real** (действительный предел), **complex** (комплексный предел)
- **Limit** – аналогичная инертная команда

```
> limit(exp(x), x = infinity), limit(exp(x), x = -infinity);
```

$$\infty, \quad 0$$

```
> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

```
> Limit(exp(x), x = infinity)=limit(exp(x), x = -infinity);
```

$$\lim_{x \to \infty} e^x = 0$$

Примеры вычисления пределов

Односторонние пределы

$$> \lim_{x \to 0+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$0$$

```
> limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, right);
```

$$0$$

$$> \lim_{x \to 0-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

$$1$$

```
> limit(1/(1+exp(1/x)), x = 0, left);
```

$$1$$

Использование аргументов **real** и **complex**

```
> Limit(1/x,x=0,real)=limit(1/x,x=0,real);
```

$$\lim_{x \to 0,\ \mathrm{real}} \frac{1}{x} = undefined$$

$$> Limit(1/x, x=0, complex) = limit(1/x, x=0, complex);$$

$$\lim_{x \to 0,\ \mathrm{complex}} \frac{1}{x} = \infty - \infty \ \mathrm{I}$$

Дифференцирование функции одной переменной

- **diff(f,x)**
- **diff(f,x$n)** – вычисление производной **n**-го порядка
  diff(f(x),x$2) эквивалентно **diff(f(x),x,x)**
- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$$

$$> \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x)$$

$$\cos(x)$$

```
> Diff(sin(x),x)=diff(sin(x),x);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$$

Производные высших порядков

$$> \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(3x^3 + 2x^2 + 5x + 10\right)$$

$$18x + 4$$

$$> diff\left(3x^3 + 2x^2 + 5x + 10, x, x, x\right)$$

$$18$$

Примеры вычисления производных

Прозводная функции, заданной как выражение

> $f := \cos(2\cdot x)^2 : dl := \frac{d}{dx} f$

$$dl := -4\cos(2x)\sin(2x)$$

Значение производной в точке

> $eval\left(dl, x = -\frac{\pi}{2}\right)$

$$0$$

Прозводная функции, заданной как функциональный оператор

> $F := x \to \cos(2\cdot x)^2 : gl := \frac{d}{dx} F(x)$

$$gl := -4\cos(2x)\sin(2x)$$

Четвертая производная

> $d4 := diff(f, x\$4)$

$$d4 := -128\sin(2x)^2 + 128\cos(2x)^2$$

Часто ответ нужно упростить:

> $combine(d4)$

$$128\cos(4x)$$

> $simplify(d4)$

$$256\cos(2x)^2 - 128$$

Символьное дифференцирование

> $\frac{d^n}{dx^n}(\sin(x) + \cos(x))$

$$\sin\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right) + \cos\left(x + \frac{1}{2}n\pi\right)$$

Некорректный синтаксис приводит к ошибке!

> $\frac{d}{dx} F$

$$0$$

> $diff(F, x)$

$$0$$

А так верно:

> $diff(F(x), x)$

$$-4\cos(2x)\sin(2x)$$

Дифференцирование функции многих переменных

- **diff(f, x1, ..., xj)** – вычисление частных производных
- **diff(f,x1$n1,x2$n2,..., xm$nm)** – частные производные высших порядков

  diff(diff (f(x1,x2), x1), x2) эквивалентно **diff(f(x1,x2), x1, x2)**

  diff(g(x,y),x$2,y$3) эквивалентно **diff(g(x,y),x,x,y,y,y)**
- **Diff** – аналогичная инертная команда

$$\frac{\partial}{\partial x} f$$

$$> \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(3x + y^2\right)$$

$$2y$$

$$> \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(3x + y^2\right)$$

$$3$$

$$> \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(3x + y^2\right)$$

$$0$$

Дифференцирование функции многих переменных: примеры

```
> f := (x-y) / (x + y) :
```

Вычислим все частные производные второго порядка

```
> Diff(f, x$2) = diff(f, x$2); simplify(rhs(%))
```

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = -\frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} - \frac{4y}{(x+y)^3}$$

```
> Diff(f, y, y) = diff(f, y$2); simplify(rhs(%))
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2(x-y)}{(x+y)^3} - \frac{4x}{(x+y)^3}$$

```
> Diff(f, x, y) = diff(f, x, y)
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{2(x-y)}{(x+y)^3}$$

Дифференциальный оператор

- **D(f)**

  D[i](f)

  D[i](f)(x, y, …) или $\mathbf{D_i(f)(x,y,\ldots)}$ – дифференцирование функции **f**, зависящей от переменных **x**, **y** (в т. ч. при конкретных значениях переменных); **i** – номер переменной для вычисления частной производной:

  1- переменная **x**, **2** – переменная **y** и т.д.
- Оператор **D** является обобщением команды **diff**: он может вычислять производные в точках и дифференцировать функциональные операторы и процедуры
- **D(f)(x) = diff(f(x),x)**
- Для преобразования **D** в **diff** и обратно используется команда **convert**
- **(D@@n)(f)(x)** или $\mathbf{D^{(n)}(f)(x)}$ – вычисление n-й производной по x
- **(D@@n)[i](f)(x,y,…)** или $\mathbf{D_{i\$n}(f)(x,y,\ldots)}$ или **(D[i$n](f))(x,y,…)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной.
- **((D@@n)[i]) ((D@@m)[j])(f)(x,y,…)** или $\mathbf{D_{i\$n,j\$m}(f)(x,y,\ldots)}$ или **(D[in, jm](f))(x,y,…)** – вычисление n-й частной производной по i-й переменной и m-й частной производной по j-й переменной

Примеры использования дифференциального оператора

```
> D(sin)
```

$$\cos$$

Вычисление производной в точке

```
> D(sin)(π)
```

$$-1$$

Функциональный оператор от одной переменной

```
> f := x -> ln(x^2) + exp(3*x) :
> g := D(f)
```

$$g := x \to \frac{2}{x} + 3\,e^{3x}$$

```
> D(f)(x)
```

$$\frac{2}{x} + 3\,e^{3x}$$

Функциональный оператор от двух переменных

```
> f := (x, y) -> x^3*y :
> D[1](f)(x, y)
```

$$3x^2y$$

```
> D[2](f)(x, y)
```

$$x^3$$

Оператор D и команда diff

```
> D(ln)(x)
```

$$\frac{1}{x}$$

```
> diff(ln(x), x)
```

$$\frac{1}{x}$$

```
> D[1, 1, 2](h)(x, y)
```

$$D_{1,1,2}(h)(x,y)$$

```
> convert(%, diff)
```

$$\frac{\partial^3}{\partial y\,\partial x^2} h(x,y)$$

Запись производных высоких порядков в операторе D

```
> diff(z(x), x$5); convert(%, D);
```

$$\frac{d^5}{dx^5} z(x)$$

$$D^{(5)}(z)(x)$$

```
> (D@@5)(z)(x)
```

$$D^{(5)}(z)(x)$$

```
> diff(p(x, y), x$2, y$5); convert(%, D);
```

$$\frac{\partial^7}{\partial y^5\,\partial x^2} p(x,y)$$

$$D_{1,1,2,2,2,2,2}(p)(x,y)$$

Варианты записи

```
> D[1$2, 2$5](p)(x, y)
```

$$D_{1,1,2,2,2,2,2}(p)(x,y)$$

```
> (D[1$2,2$5])(p)(x, y);
```

$$D_{1,1,2,2,2,2,2}(p)(x,y)$$

```
> ((D@@2)[1])((D@@5)[2])(p)(x,y);
```

$$D^{(2)}{}_1\left(D^{(5)}{}_2\right)(p)(x,y)$$

Исследование функций

- Непрерывность и точки разрыва: **iscont**, **discont**, **singular**
- Нахождение экстремумов: **extrema**, **minimize**, **maximize**

Непрерывность и точки разрыва: определение

Функция $f(x)$ *непрерывна* в окрестности в

окрестности $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ точки x_0, если она определена

в $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если эта функция определена в некоторой проколотой окрестности $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$ точки x_0 (в самой точке x_0 функция может быть не определена) и выполняется хотя бы одно из следующего:

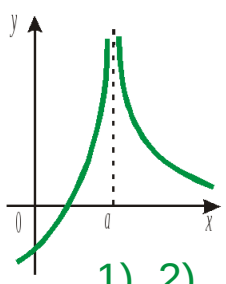
1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ (бесконечный предел слева)

2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$ (бесконечный предел справа)

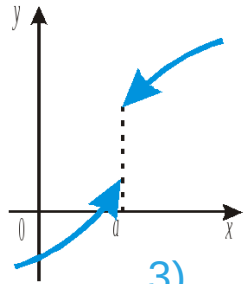
3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

4) $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но либо

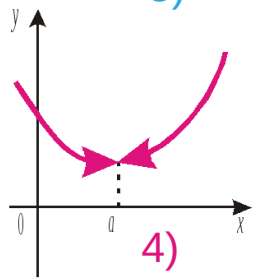
а) $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, либо б) $x_0 \notin$ области определения $f(x)$



1), 2)



3)



4)

- Случаи 1) и 2) – разрывы II рода (бесконечные)
- Случаи 3) и 4) – разрывы I рода, при этом

случай 3) – *неустранимый* разрыв, а случай 4) – *устранимый* разрыв

Непрерывность и точки разрыва: команды Maple

- **iscont(f,x=x1..x2)** – проверка функции (выражения) на непрерывность
- **discont(f,x)** – находит точки нарушения непрерывности (в т. ч. разрывы первого и второго рода) и отсутствия гладкости
- **singular(f,x)** – находит точки сингулярности (т. е. точки, в которых функция не дифференцируема или точки неустранимых разрывов)

> $f := \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)$

$$f := e^{\frac{1}{x+3}}$$

> $iscont(f, x = -\infty .. \infty)$

$$false$$

> $discont(f, x)$

$$\{-3\}$$

> $singular(f, x)$

$$\{x = -3\}$$

> $limit(f, x = -3, right)$

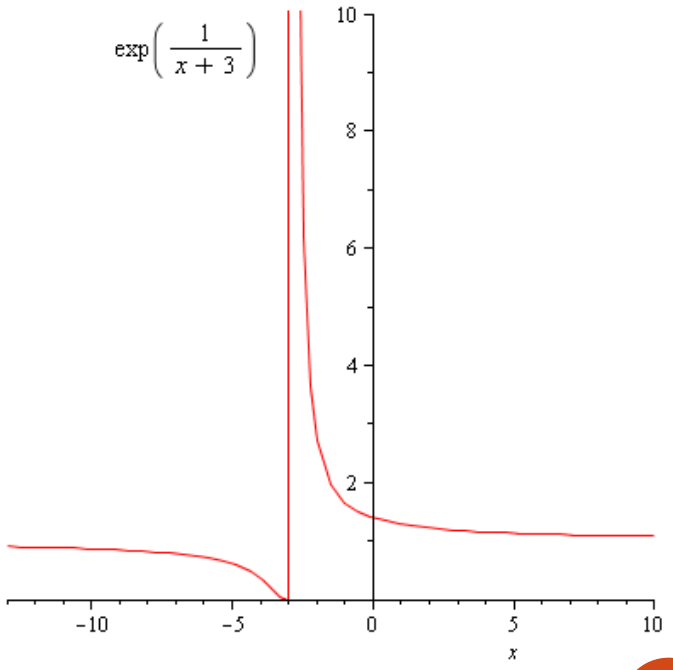
$$\infty$$

> $limit(f, x = -3, left)$

$$0$$

x=-3 - точка разрыва 2 рода

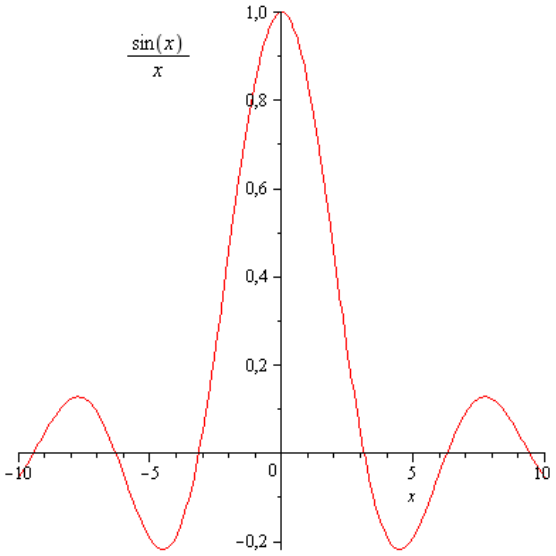
> $plot\left(f, x = -13 .. 10, 0 .. 10, title = \exp\left(\frac{1}{x+3}\right)\right)$



Примеры: устранимый и неустранимый разрыв

```
> f := sin(x)/x :
> iscont(f, x = -∞ .. ∞)
                        false
> discont(f, x)
                        {0}
> singular(f, x)
                        {x = 0}
> limit(f, x = 0, right)
                        1
> limit(f, x = 0, left)
                        1
```

x=0 - точка устранимого разрыва 1 рода

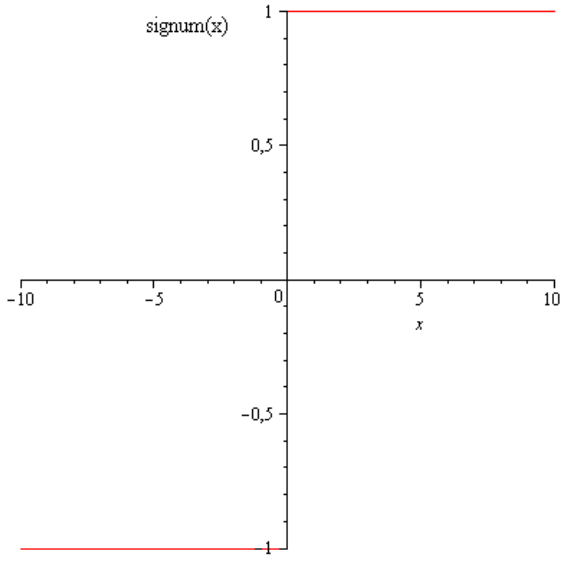



```
> f := signum(x) :
> iscont(f, x = -∞ .. ∞)
                        false
> discont(f, x)
                        {0}
> singular(f, x)
```

Команда singular использует solve, поэтому здесь ничего не выдает

```
> limit(f, x = 0, right)
                        1
> limit(f, x = 0, left)
                        -1
```

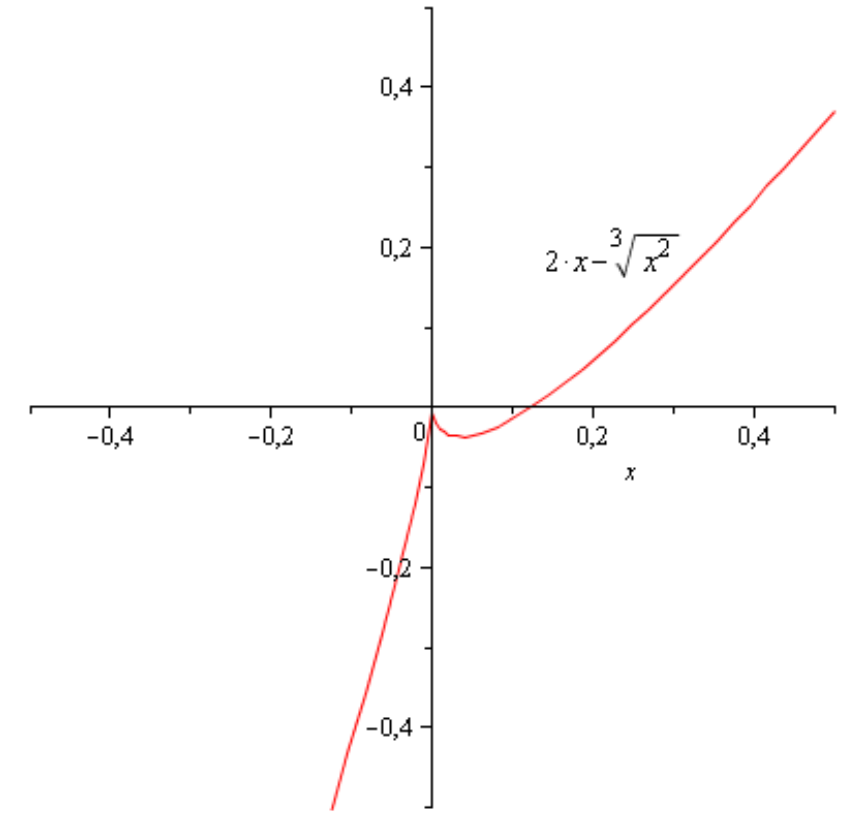
x=0 - точка неустранимого разрыва 1 рода



Пример: отсутствие гладкости

```
> y := 2·x - (x^2)^(1/3)
                    y := 2 x - (x^2)^(1/3)
> iscont(y, x = -∞ .. ∞)
                              true
> discont(y, x)
                              {0}
> singular(y, x)
                    {x = ∞}, {x = -∞}
> limit(y, x = 0, left)
                               0
> limit(y, x = 0, right)
                               0
> d1 := diff(y, x)
                    d1 := 2 - 2/3 x/(x^2)^(2/3)
> eval(d1, x = 0)
Error, numeric exception: division
by zero
```

```
> plot(y, x = -0.5 ..0.5, -0.5 ..0.5)
```



Функция непрерывна в точке x=0, но производная функции в этой точке не существует

Критическая точка, необходимое и достаточное условия экстремума

Критическая точка. Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если $f'(x_0) = 0$ либо $f'(x_0)$ не существует.

Необходимое условие экстремума. Функция $f(x)$ имеет *экстремум* в точке x_0, если она определена в окрестности $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ и для всех точек этой окрестности выполняется: $f(x) < f(x_0)$ (*максимум*) или $f(x) > f(x_0)$ (*минимум*)

Достаточное условие экстремума.

1) *Исследование по первой производной.* Если функция $f(x)$ определена и непрерывна в окрестности $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ критической точки x_0, $\exists f'(x)$ в $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ и $f'(x)$ сохраняет определенный знак слева от x_0 и справа от x_0, то имеет место следующее:

Знак производной $f'(x_0)$		Вывод
$x < x_0$	$x > x_0$	
+	+	экстремума нет
–	–	экстремума нет
+	–	максимум
–	+	минимум

Наибольшее и наименьшее значение функции, глобальные и локальные экстремумы

Достаточное условие экстремума.

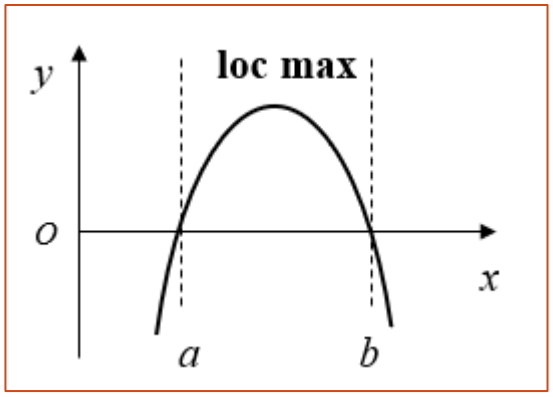
2) *Исследование по второй производной*. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и при этом $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то имеет место следующее:

Знак производной $f''(x_0)$	Вывод
–	максимум
+	минимум

Наибольшее и наименьшее значение.

Наибольшее (*наименьшее*) *значение* на отрезке $[a,b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции , или в граничных точках $x = a$ и $x = b$ этого отрезка.

Глобальный и локальный экстремум. Экстремум называется *глобальным*, если он достигается на всей числовой оси, в противном случае он называется *локальным*.



Здесь точки x=a и x=b **не** являются экстремумами, но в этих точках функция имеет наименьшее значение на отрезке [a,b]

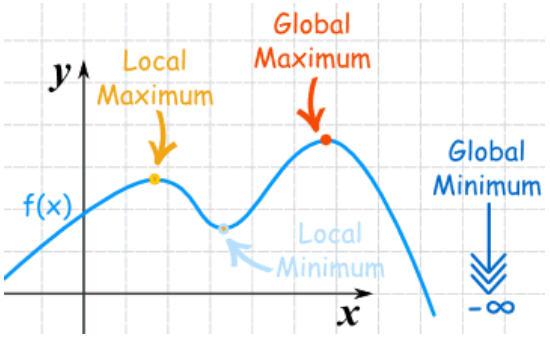


Рисунок: https://indicator.ru/label/lokalnyj-ekstremum

Команды для поиска экстремумов

- **extrema(f,{cond},x,`s`)** – поиск экстремумов, удовлетворяющих ограничениям cond, для функции от переменных x,y
- s – необязательное имя параметра для координат точек экстремумов
- **extrema(f,{},x,`s`)** – поиск экстремумов функции на всей числовой оси

Поиск глобальных минимумов

- **minimize(f) ; minimize(f, location)** – поиск глобальных минимумов
- **location** – ключевое слово для вывода координат точек минимумов

Поиск локальных минимумов

- **minimize(f, x=x1..x2) ; minimize(f, x=x1..x2,location)** – поиск минимальных значений функции на отрезке [x1,x2] .
- Возможный синтаксис: **minimize(f, x<a); minimize(f, x>b)** – поиск на полуоси (−∞;a) или (b,+∞)

Поиск глобальных и локальных максимумов

Все аналогично для команды **maximize**

```
> restart; y := x^4/(x+1)^3:
> extrema(y, { }, x,'s'); evalf(%); s;
```

$$\left\{0,\ -\frac{256}{27}\right\}$$

$$\{-9.481481481,\ 0.\}$$

$$\{\{x=-4\},\ \{x=0\}\}$$

Пример: поиск экстремумов и точек экстремумов

$$> \quad y := \frac{x^4}{(x+1)^3} :$$

$$> \quad minimize(y, x < -1);\ maximize(y, x < -1, location);\ evalf(\%)$$

$$-\infty$$

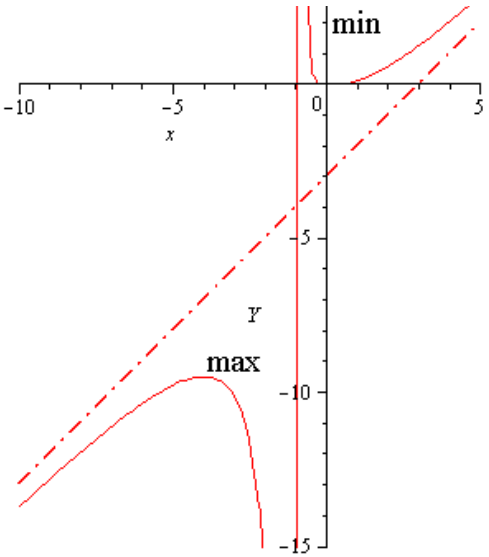
$$-\frac{256}{27}, \left\{ \left[\{x = -4\}, -\frac{256}{27} \right] \right\}$$

$$-9.481481481, \{ [\{x = -4.\}, -9.481481481] \}$$

$$> \quad maximize(y, x > -1);\ minimize(y, x > -1, location);$$

$$\infty$$

$$0, \{ [\{x = 0\}, 0] \}$$



Пример поиска экстремумов у функции с точкой перегиба

> $restart; y := \frac{x^3}{4 - x^2}$:

> $extrema(y, \{\}, x, 's'); s;$

$$\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$$

$$\{\{x = 0\}, \{x = -2\sqrt{3}\}, \{x = 2\sqrt{3}\}\}$$

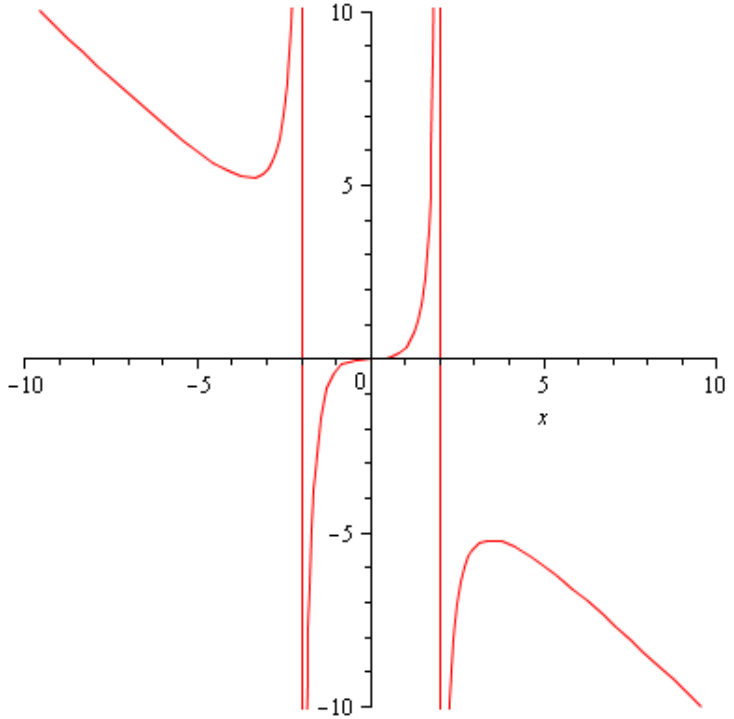
> $minimize(y)$

$$-\infty$$

> $maximize(y)$

$$\infty$$

> $plot(y, x = -10..10, -10..10)$



> $minimize(y, x < -2, location); evalf(\%)$

$$3\sqrt{3}, \{[\{x = -2\sqrt{3}\}, 3\sqrt{3}]\}$$

$$5.196152424, \{[\{x = -3.464101616\}, 5.196152424]\}$$

> $maximize(y, x > 2, location); evalf(\%)$

$$-3\sqrt{3}, \{[\{x = 2\sqrt{3}\}, -3\sqrt{3}]\}$$

$$-5.196152424, \{[\{x = 3.464101616\}, -5.196152424]\}$$

> $minimize(y, x = -2..2, location)$

$$-\infty, \{[\{x = -2\}, -\infty]\}$$

> $maximize(y, x = -2..2, location)$

$$\infty, \{[\{x = 2\}, \infty]\}$$

При исключении точек разрыва получаем минимальные и максимальные значения на концах отрезка

> $minimize(y, x = -1.9..1.9, location)$

$$-17.58717949, \{[\{x = -1.9\}, -17.58717949]\}$$

> $maximize(y, x = -1.9..1.9, location)$

$$17.58717949, \{[\{x = 1.9\}, 17.58717949]\}$$

> $d1 := diff(y, x);$

$$d1 := \frac{3x^2}{4 - x^2} + \frac{2x^4}{(4 - x^2)^2}$$

> $eval(d1, x = 0.1)$

$$0.007531359727$$

> $eval(d1, x = -0.1)$

$$0.007531359727$$

В точке x=0 прозводная не меняет знак,
это точка перегиба
В точке x=$-2\sqrt{3}$ локальный минимум fmin=$3\sqrt{3}$
В точке x=$2\sqrt{3}$ локальный максимум fmax=$-3\sqrt{3}$

Асимптоты

Вертикальные асимптоты определяются наличием бесконечных разрывов, уравнение вертикальной имеет вид $x = a$, если a – точка разрыва.

Уравнение **наклонной асимптоты** имеет вид $y_i = k_i x + b_i$, $i = 1, 2$, где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b_1 = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x), \quad k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b_2 = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x)$$

Горизонтальная асимптота $y = b$ – частный случай наклонной асимптоты в случае $k = 0$

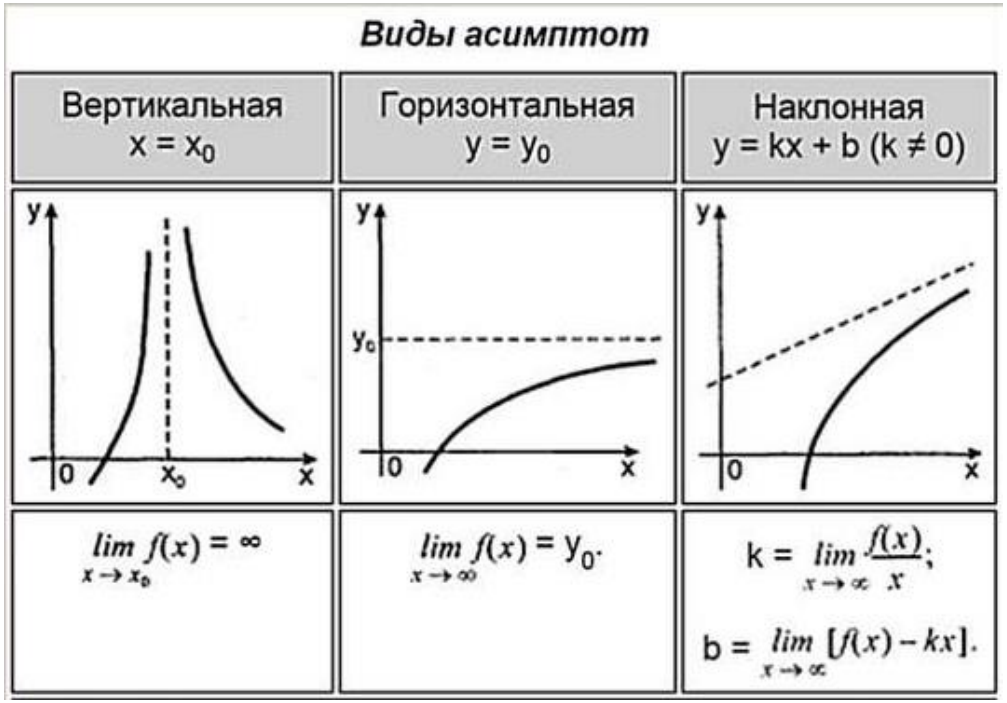


Рисунок: https://математика24.рф/kak-najti-asimptoty-funkcii.html

Пример построения асимптот

> $f := \dfrac{x^2 + x + 1}{x} \cdot \mathrm{signum}(x)$:

> $b1 := \lim\limits_{x \to \infty} (f - k1\,x);\ b2 := \lim\limits_{x \to -\infty} (f - k2\,x);\ y1 := k1\,x + b1;\ y2 := k2\,x + b2$

$$b1 := 1$$

$$b2 := -1$$

$$y1 := x + 1$$

$$y2 := -x - 1$$

Наклонные асимптоты: $y1 = x + 1, y2 = -x - 1$

Вертикальная асимптота $x = 0$ в точке бесконечного разрыва

> $with(plots)$:

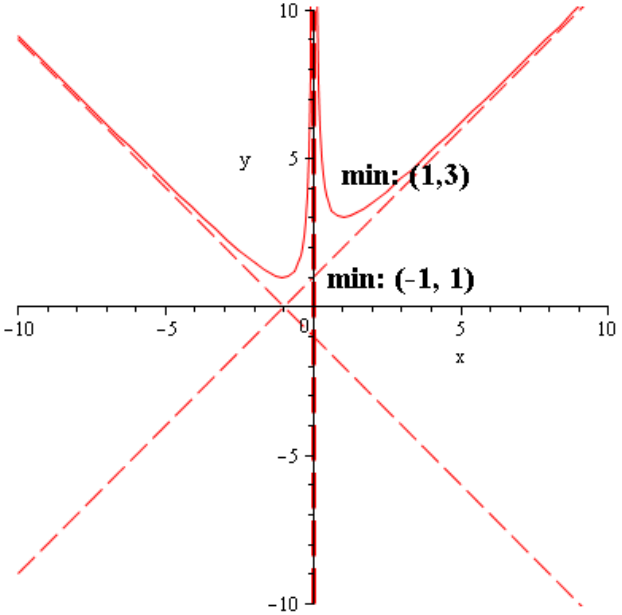
> $t1 := textplot([0, 1, " \text{ min: } (-1, 1)"], font = [TIMES, BOLD, 16]], align = \{right\})$:

> $t2 := textplot([0.5, 4.5, " \text{ min: } (1,3)"], font = [TIMES, BOLD, 16]], align = \{right\})$:

> $y3 := implicitplot(x = 0, x = -10..10, y = -10..10, thickness = 3, linestyle = dash)$:

> $p := plot([f, y1, y2], x = -10..10, -10..10, labels = ["x", "y"], linestyle = [solid, dash, dash], color = red)$:

> $display([p, t1, t2, y3])$



Разложение в ряд и аппроксимация функций

- Разложение функции в степенной ряд
- Разложение функции в ряд Тейлора
- Полиномиальная интерполяция

Разложение функции в степенной ряд

- **series(f(x), x=a, n)** – разложение функции f в ряд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

где **x0** – точка, в окрестности которой производится разложение,
n – порядок разложения. Если порядок не указан, то он определяется значением константы **Order**

```
> series(exp(-x)*sqrt(x+1), x=0)
```

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 + O(x^6)$$

```
> Order := 10:
> series(exp(-x)*sqrt(x+1), x=0)
```

$$1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{13}{48}x^3 - \frac{79}{384}x^4 + \frac{503}{3840}x^5 - \frac{3953}{46080}x^6 + \frac{39317}{645120}x^7 - \frac{479071}{10321920}x^8 + \frac{6886063}{185794560}x^9 + O(x^{10})$$

```
> series(x/(1-x-x^2), x=0, 5)
```

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + O(x^5)$$

```
> convert(%, polynom)
```

$$x + x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

Разложение функции в ряд Тейлора

- **taylor(f(x), x=a, n)** – разложение функции одной переменной в ряд Тейлора

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

- **coeftayl(f(x), vars, n)** – коэффициент при члене порядка **n** по переменным разложения **vars**
- **mtaylor(f(x), [x1=a1,...,xn=an], n)** – разложение функции многих переменных в ряд Тейлора

```
> f := sin(x) + cos(x) :
> taylor(f, x = 0)
```

$$1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5+O(x^6)$$

```
> taylor(f, x = 0, 4)
```

$$1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+O(x^4)$$

```
> coeftayl(f, x = 0, 3)
```

$$-\frac{1}{6}$$

Разложение функции многих переменных

```
> mtaylor(sin(x^2 + y^2), [x = 0, y = 0], 10);
```

$$x^2+y^2-\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{2}y^2x^4-\frac{1}{2}y^4x^2-\frac{1}{6}y^6$$

```
> coeftayl(sin(x^2 + y^2), [x, y] = [0, 1], [0, 0]);
```

$$\sin(1)$$

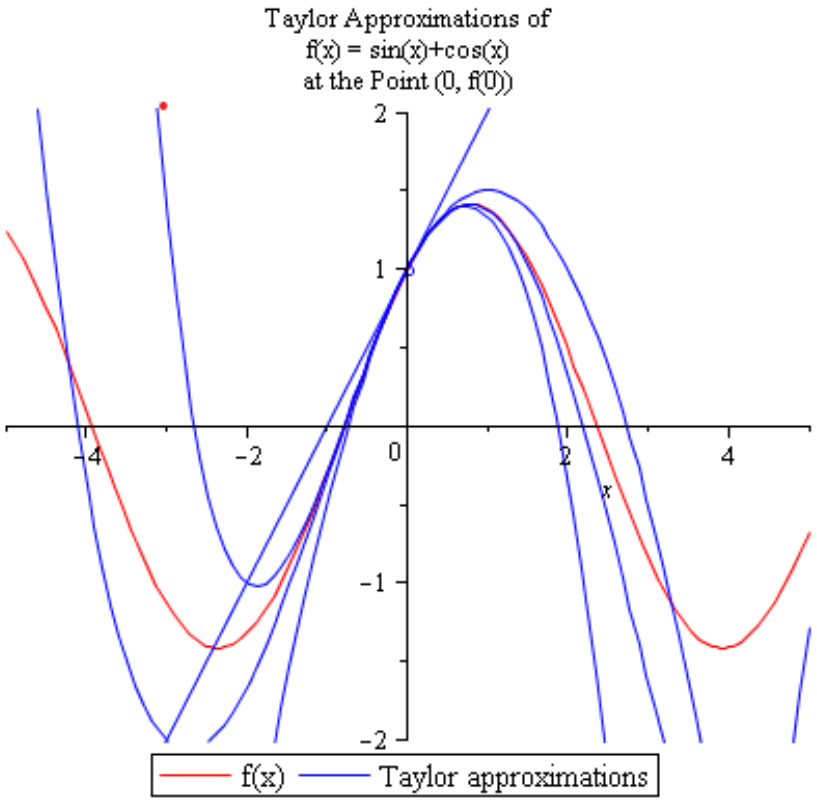
Разложение в ряд Тейлора: иллюстрация в пакете Student

Иллюстрация разложения в ряд Тейлора с помощью команды TaylorApproximation

```
> with(Student[Calculus1]) : f := sin(x) + cos(x) : TaylorApproximation(f, x = 0, order = 4)
```

$$1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

```
> TaylorApproximation(f, x = 0, output = plot, order = 1..4, view = [-5..5, -2..2]);
```



Пример: разложение в ряд Маклорена и построение графиков

```
> restart; f := x^3·arccot(x);
```

$$f := x^3 \operatorname{arccot}(x)$$

конвертация в полином объекта типа series (для иллюстрации приведены типы)

```
> pp5 := taylor(f, x = 0, 5); p5 := convert(%, polynom);
  whattype(pp5); whattype(p5)
```

$$pp5 := \frac{1}{2}\pi x^3 - x^4 + O(x^6)$$

$$p5 := \frac{1}{2}\pi x^3 - x^4$$

series

`+`

```
> taylor(f, x = 0, 7); p7 := convert(%, polynom);
```

$$\frac{1}{2}\pi x^3 - x^4 + \frac{1}{3}x^6 + O(x^8)$$

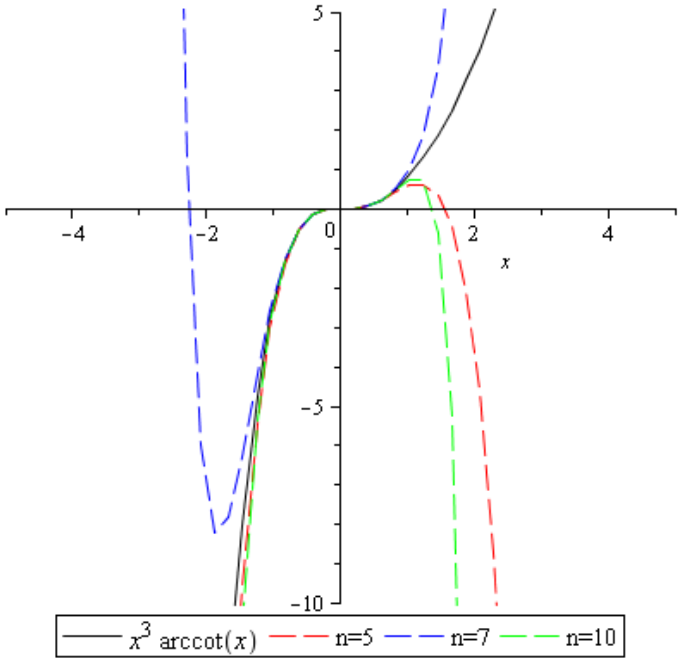
$$p7 := \frac{1}{2}\pi x^3 - x^4 + \frac{1}{3}x^6$$

```
> taylor(f, x = 0, 10); p10 := convert(%, polynom);
```

$$\frac{1}{2}\pi x^3 - x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^8 + O(x^{10})$$

$$p10 := \frac{1}{2}\pi x^3 - x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{5}x^8$$

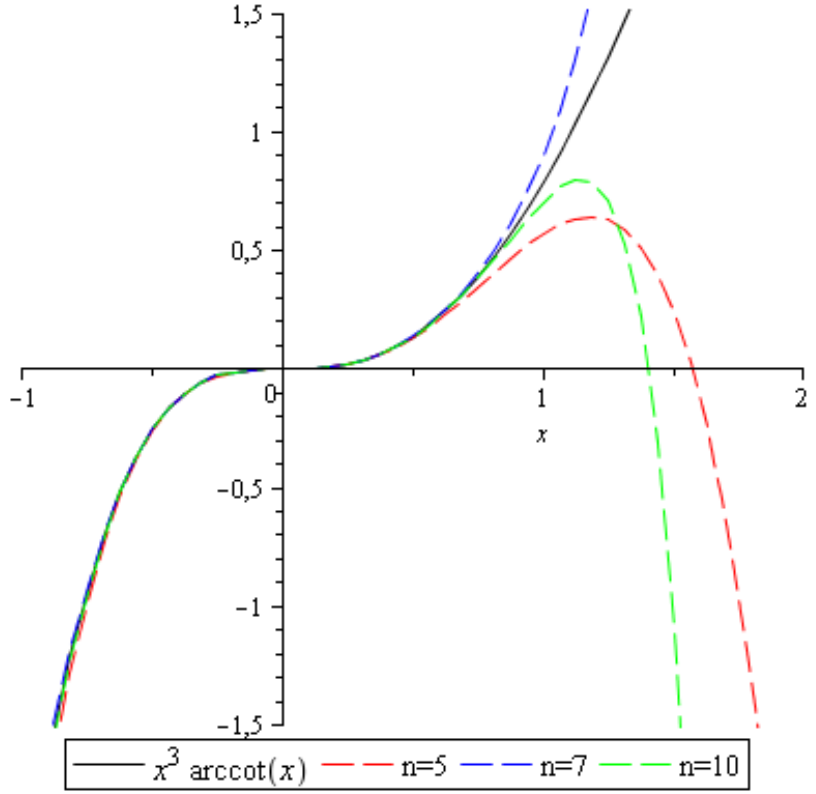
```
> plot([f, p5, p7, p10], x = -5..5, -10..5, color = [black,
  red, blue, green], linestyle = [solid, dash, dash,
  dash], legend = [f, "n=5", "n=7", "n=10"])
```



Пример: построение графиков

На каком интервале изменения независимой переменной разложение в ряд наилучшим образом аппроксимирует заданную функцию при n=5?
А при n=10?

```
> plot([f, p5, p7, p10], x = -1..2, -1.5..1.5, color = [black,
      red, blue, green], linestyle = [solid, dash, dash,
      dash], legend = [f, "n=5", "n=7", "n=10"])
```



Полиномиальная интерполяция

- **interp(x, y, v)**
  - **x** – список независимых переменных x[1], ..., x[n+1]
  - **y** – список независимых переменных y[1], ..., y[n+1]
  - **v** – независимая переменная
- Новая команда: **PolynomialInterpolation** из пакета **CurveFitting**
- **PolynomialInterpolation(xydata, v, opts)**
- **PolynomialInterpolation(xdata, ydata, v, opts)**
  - **xydata** – двумерный массив или матрица точек [[x1, y1], [x2, y2], ..., [xn, yn]]
  - **xdata** – список независимых переменных [x1, x2, ..., xn]
  - **ydata** – список независимых переменных [y1, y2, ..., yn]
  - **v** – независимая переменная
  - **opts** – опции в форме **form=option**, где option может принимать значения **Lagrange**, **monomial**, **Newton** или **power**

$$> \quad X := [0, 1, 2, 3, 4, 5] : Y := [0, 1, 4, 3, 2, 1] : f1 := interp(X, Y, x)$$

$$f1 := -\frac{7}{60}x^5 + \frac{19}{12}x^4 - \frac{91}{12}x^3 + \frac{173}{12}x^2 - \frac{73}{10}x$$

$$> \quad with(CurveFitting) : f2 := PolynomialInterpolation([[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]], x)$$

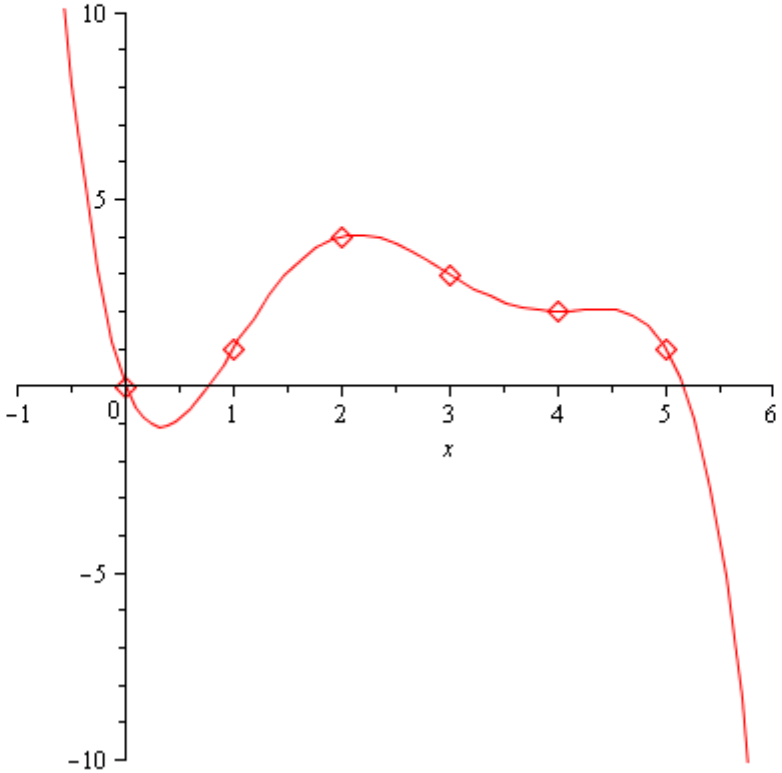
$$f2 := -\frac{7}{60}x^5 + \frac{19}{12}x^4 - \frac{91}{12}x^3 + \frac{173}{12}x^2 - \frac{73}{10}x$$

Пример: полиномиальная интерполяция функции, графическая иллюстрация

```
> with(CurveFitting) : f2 := PolynomialInterpolation([[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]], x)
```

$$f2 := -\frac{7}{60}x^5 + \frac{19}{12}x^4 - \frac{91}{12}x^3 + \frac{173}{12}x^2 - \frac{73}{10}x$$

```
> with(plots) : p1 := plot(f2, x = -1..6, -10..10) :
> p2 := plot([[0, 0], [1, 1], [2, 4], [3, 3], [4, 2], [5, 1]], style = point, symbolsize = 20) :
> display([p1, p2])
```



Сумма и произведение ряда

- Операция символьного суммирования **sum**
- Различие между командами **sum** и **add**
- Бесконечные и конечные произведения **product**
- Различие между командами **product** и **mul**

Вычисление суммы ряда

- Команда **sum** выполняет определенное и неопределенное символьное суммирование
- **sum(f, k=1..∞)** – сумма ряда
- **sum(f, k=m..n)** – частичная сумма ряда
- **Sum** – аналогичная инертная команда

$$\sum_{i=k}^{n} f$$

> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

∞

> $sum\left(\frac{1}{n}, n=1..infinity\right)$

∞

```
> Sum(1/n!,n=0..infinity)=sum(1/n!,
  n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; evalf(\%)$

$3\,e^2 - 1$

21.16716830

> $\sum_{n=1}^{10} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; evalf(\%)$

$\frac{42862}{2025}$

21.16641975

> $\sum_{n=1}^{30} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}; evalf(\%)$

$\frac{836648333795370202334220 76}{395257562119053391570312 5}$

21.16716830

Сумма ряда: примеры

При указании только индекса суммирования Maple попытается получить формулу для суммы в виде S(k), где S(k+1)-S(k)=a(k), где a(k) - общая зависимость слагаемых от индекса суммирования k

> $\sum_k k^2$

$$\frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k$$

> $\sum_{k=0}^{n-1} k$

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

```
> Sum(x^n/n!,n=0..infinity)=sum(x^n/n!,n=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Частичная и полная сумма ряда

> $a[n] := \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$:

> $sum(a[n], n=1..N)$

$$-\frac{1}{3(3N+1)} + \frac{1}{3}$$

> $sum(a[n], n=1..infinity)$

$$\frac{1}{3}$$

Сравнение команды суммирования sum и команды добавления add

```
> sum(x^n, n = 1..10)
```

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

```
> add(x^n, n = 1..10)
```

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

```
> sum(x^n, n = 1..1000)
```

$$\frac{x^{1001}}{x-1} - \frac{x}{x-1}$$

```
> add(x^n, n = 1..1000);
```

$$x^{36} + x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14} + x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18}$$
$$+ x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29}$$
$$+ x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44}$$



$$+ x^{980} + x^{981} + x^{983} + x^{982} + x^{984} + x^{985} + x^{986} + x^{987} + x^{988} + x^{989}$$
$$+ x^{990} + x^{991} + x^{992} + x^{993} + x^{994} + x^{995} + x^{996} + x^{997} + x^{998} + x^{999}$$
$$+ x^{1000} + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

```
> sort(%, x, ascending)
```

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + x^{12} + x^{13} + x^{14}$$
$$+ x^{15} + x^{16} + x^{17} + x^{18} + x^{19} + x^{20} + x^{21} + x^{22} + x^{23} + x^{24} + x^{25}$$
$$+ x^{26} + x^{27} + x^{28} + x^{29} + x^{30} + x^{31} + x^{32} + x^{33} + x^{34} + x^{35} + x^{36}$$
$$+ x^{37} + x^{38} + x^{39} + x^{40} + x^{41} + x^{42} + x^{43} + x^{44} + x^{45} + x^{46} + x^{47}$$
$$+ x^{48} + x^{49} + x^{50} + x^{51} + x^{52} + x^{53} + x^{54} + x^{55} + x^{56} + x^{57} + x^{58}$$



Вычисление произведений

- Команда **product** вычисляет символьные произведения
- **product(f, k=1..∞)** – произведение ряда
- **product(f, k=m..n)** – частичное произведение ряда
- **Product** – аналогичная инертная команда

$$\prod_{i=k}^{n} f$$

> $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$\frac{1}{2}$$

```
> Product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity) = product((n^3-1)/(n^3+1), n = 2 .. infinity);
```

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)=\frac{2}{3}$$

Сравнение с командой умножения mul

> $\prod_{k=1}^{3}(k^2);$

$$36$$

> $mul(k^2, k=1..3)$

$$36$$

> $\prod_{k=1}^{n}(k^2)$

$$\Gamma(n+1)^2$$

Наложение ограничений на переменные

- Наложение условий **assume**, дополнительных условий **additionally**, добавление нового свойства **addproperty**
- Вывод информации о наложенных ограничениях **about**
- Проверка ограничений **is**, **coulditbe**
- Команды **hasassumptions** и **getassumptions**
- Вычисление выражения в предположении свойств **assuming**

Наложение ограничений на переменные

- **assume(x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение условий
  assume(x1::prop1, x2::prop2, ...); assume(xrel1, xrel2, ...)
- **additionally(x1, prop1, x2, prop2, ...)** – наложение дополнительных условий
  additionally(x1::prop1, x2::prop2, ...); additionally(xrel1, xrel2, ...)
- **addproperty(prop1, parents, children)** – добавление нового свойства, основанного на свойствах **parents** и **children**
- **about(x1)** – выводит информацию об условиях, наложенных на **x1** и свойствах **x1**

```
> assume(x > -1)
> additionally(x ≤ 1)
> about(x)
Originally x, renamed x~:
  is assumed to be: RealRange(Open(-1),1)

> assume(y :: negative); about(y)
Originally y, renamed y~:
  is assumed to be: RealRange(-infinity,Open(0))
```

Проверка наложенных ограничений

- **is(x1, prop1)** – проверяет, удовлетворяет ли **x1** свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL
  is(x1::prop1); is(xrel1)
- **coulditbe(x1, prop1)** – проверяет, может ли **x1** удовлетворять свойству **prop1**, результат в виде true/false/FAIL
  coulditbe(x1::prop1); coulditbe(xrel1);

```
> assume(x > -1, x ≤ 1); is(x :: positive)
                                                    false

> coulditbe(x::positive)
                                                    true

> is(1 - x^2, 'positive');
                                                    false

> coulditbe(1 - x^2 = 1)
                                                    true

> x := 'x': about(x)
x:
  nothing known about this object
```

Вычисление выражений при наложении ограничений на переменные

- **hasassumptions(x1)** – проверяет, наложены ли на **x1** какие-то ограничения, результат в виде true/false
- **getassumptions(x1)** - возвращает список наложенных на **x1** ограничений в форме expression::property
- **assuming** – вычисление выражения в предположении свойств

```
> assume(x :: integer); additionally(x > 1)
> hasassumptions(x)
                                  true
> getassumptions(x)
                    {x~::(AndProp(integer, RealRange(2, ∞)))}
> sqrt(a^2) assuming a > 0
                                  a~
> sqrt(a^2) assuming a ≤ 0
                                 -a~
```

Пример использования ограничений на переменные: вычисление интегралов

$$> \int_0^{\infty} e^{-a\,x}\,dx$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{e^{-a\,x} - 1}{a} \right)$$

$$> assume(a > 0); \int_0^{\infty} e^{-a\,x}\,dx$$

$$\frac{1}{a\sim}$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-a\,x}\,dx \text{ assuming } a :: positive$$

$$\frac{1}{a\sim}$$

$$> \int_0^{\infty} e^{-a\,x}\,dx \text{ assuming } a :: negative$$

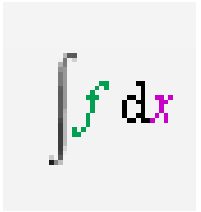
$$\infty$$

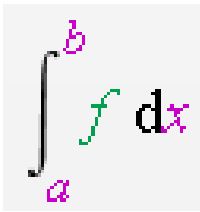
Интегрирование

- Интегрирование: неопределенный и определенный интегралы
- Вычисление несобственных интегралов
- Численное интегрирование
- Методы интегрирования: интегрирование по частям и замена переменных
- Повторные, двойные и тройные интегралы
- Графическая аппроксимация определенного интеграла

Интегрирование функции одной переменной

- **int(f, x)** – неопределенный интеграл
- **int(f, x=a..b)** – определенный интеграл
- **Int** – аналогичная инертная команда





```
> int(sin(x), x);
```

$$-\cos(x)$$

```
> int(sin(x), x=0..Pi);
```

$$2$$

```
> Int((1+cos(x))^2, x=0..Pi) = int((1+cos(x))^2, x=0..Pi);
```

$$\int_0^{\pi} (1+\cos(x))^2 \, dx = \frac{3}{2}\pi$$

Вычисление несобственных интегралов и численное интегрирование

- **evalf(int(f, x=x1..x2), digits)** – вычисление интеграла с точностью digits (по умолчанию равна константе Digits)

Несобственный интеграл

```
> assume(-1 < a);
```

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-a x^2}}{x e^{x^2}} dx$$

$$\frac{1}{2} \ln(1 + a\sim)$$

Численное интегрирование

```
> evalf(int(cos(x)/x, x = Pi/6..Pi/4), 15);
```

0.322922981113732

Методы интегрирования: интегрирование по частям

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \qquad \int u\,v'\,dx = u\,v - \int v\,u'\,dx \qquad \int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

1) команда **intparts** из устаревшего пакета **student**

intparts(f, u), где f – выражение вида $\int u \cdot v'\,dx$

- **intparts(Int(F, x), u)**

2) команды **IntRules** или **Rule** из пакета **Student[Calculus1]**

```
> with(student):
> J := x^3*sin(x):
> intparts(Int(J, x), x^3);#u = x^3, v'= sin(x)
                  -x^3 cos(x) - (∫(-3 x^2 cos(x)) dx)
> intparts(%, x^2);#u=x^2, v'=-3 cos(x)
                  -x^3 cos(x) + 3 x^2 sin(x) + ∫(-6 x sin(x)) dx
> value(%)
                  -x^3 cos(x) + 3 x^2 sin(x) - 6 sin(x) + 6 x cos(x)
Проверка с помощью команды int
> int(J, x)
                  -x^3 cos(x) + 3 x^2 sin(x) - 6 sin(x) + 6 x cos(x)
```

```
> with(Student[Calculus1]):
> Rule[parts, sin(x), e^x](∫sin(x) e^x dx)   #u=sin(x),v'=e^x
                  ∫sin(x) e^x dx = sin(x) e^x - (∫cos(x) e^x dx)
> Rule[parts, cos(x), e^x](%)   #u=cos(x), v'= e^x
                  ∫sin(x) e^x dx = sin(x) e^x - cos(x) e^x + ∫(-sin(x) e^x) dx
> value(%)
                  ∫sin(x) e^x dx = -1/2 cos(x) e^x + 1/2 sin(x) e^x
Проверка с помощью команды int
> int(sin(x) e^x, x)
>
                  -1/2 cos(x) e^x + 1/2 sin(x) e^x
```

Методы интегрирования: замена переменных (метод подстановки)

1) команда **changevar** из устаревшего пакета **student**

changevar(s, f), где s – выражение вида h(x) = g(u), f – выражение вида Int(F(x), x = a...b)

- **changevar(h(x)=t, Int(f, x), t)** – замена переменных

2) команда **Change** из пакета **IntegrationTools** или команда **ChangeofVariables** из пакета **Student[MultivariateCalculus]**

$$\int F(x)dx = \left|x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt\right| = \int F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

```
> with(student):
> f := 1/(1+cos(x)):
> changevar(tan(x/2) = t, Int(f, x = -Pi/2 .. Pi/2), t)
```

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(1+\cos(2\arctan(t)))\,(1+t^2)}\,dt$$

```
> value(%)
```

$$2$$

```
> int(f, x = -Pi/2 .. Pi/2)
```

$$2$$

```
> with(IntegrationTools):
> J := Int(1/(1+cos(x)), x = -Pi/2 .. Pi/2)
```

$$J := \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx$$

```
> Change(J, tan(x/2) = t)
```

$$2\left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+\cos(2\arctan(t)))\,(1+t^2)}\,dt\right)$$

```
> value(%)
```

$$2$$

Интегрирование функции многих переменных

- Повторный интеграл – вложенность команд **int**

1) команды **Doubleint** и **Tripleint** устаревшего пакета **student**

- **Doubleint(f(x, y), D)** – двойной интеграл, где **D** – область интегрирования
- **Tripleint(f(x, y, z),x, y, z, V)** – тройной интеграл, где **V** – область интегрирования

2) Команда **MultiInt** пакета **Student[MultivariateCalculus]**

- **MultiInt(f(x,y), x=a..b, y=c..d, opts)**
- **MultiInt(f(x,y,z), x=a..b, y=c..d, z=e..f, opts)**
- Важен порядок пределов интегрирования!

```
> Int(Int(y^3/(x^2+y^2),x=0..y),y=2..4)=int(int(y^3/(x^2+y^2),x=0..y),y=2..4)
```

$$\int_2^4 \int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \frac{14}{3}\pi$$

Интегрирование функции многих переменных: примеры

```
> with(student):
> J2 := Doubleint(sin(x + 2·y), x = y .. π/2 − y, y = 0 .. π/2)
```

$$J2 := \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_y^{\frac{1}{2}\pi - y} \sin(x + 2\,y)\ dx\ dy$$

```
> value(J2)
```

$$\frac{2}{3}$$

```
> J3 := Tripleint(4 + z, y = x^2 .. 1, x = −1 .. 1, z = 0 .. 2)
```

$$J3 := \int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (4 + z)\ dy\ dx\ dz$$

```
> value(J3)
```

$$\frac{40}{3}$$

```
> Doubleint(h·g, x, y, C)
```

$$\iint_C h\,g\ dx\ dy$$

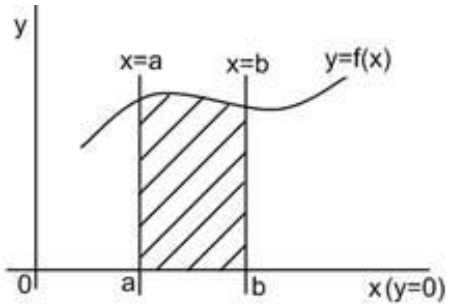
```
> with(Student[MultivariateCalculus]):
> MultiInt(3 x^2 + 3 y^2, x = 1 .. 4, y = −1 .. 6)
```

$$1092$$

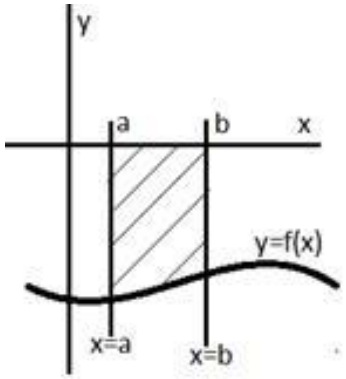
Геометрический смысл определенного интеграла

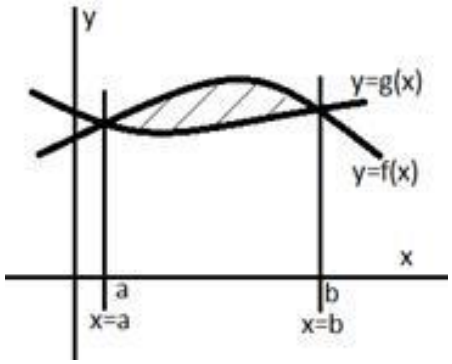
Геометрический смысл определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ заключается в том, что его значением является площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной неотрицательной на $[a,b]$ функции $f(x)$ (линия $y = f(x)$), осью Ox (прямая $y = 0$) и прямыми $x = a$ и $x = b$.

Площадь $S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$



Если криволинейная трапеция находится ниже оси Ox, то $\int_a^b f(x)dx = -S$





$$S = S_1 - S_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$$

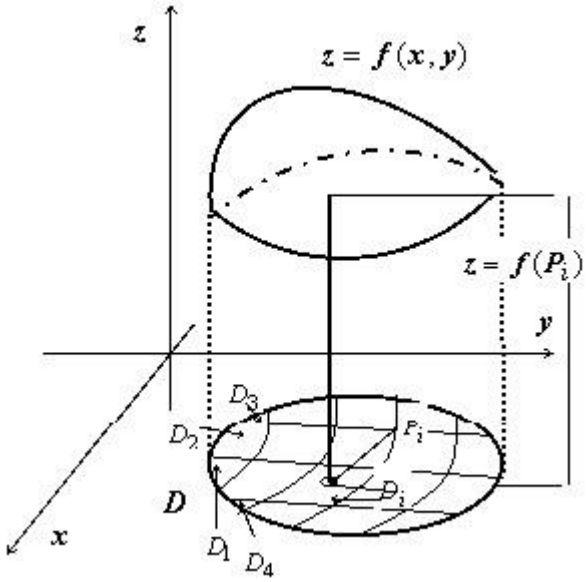
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

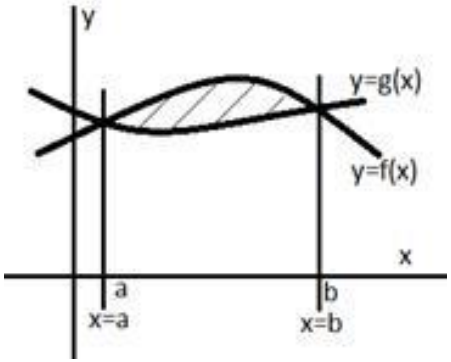
Рисунки: https://poznayka.org/s67198t2.html

Геометрический двойного интеграла

Геометрический смысл двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ заключается в том, что его значением является объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y) \geq 0,$ снизу - замкнутой областью D, лежащей в плоскости Oxy, а с боков - цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz.

Объем $V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$





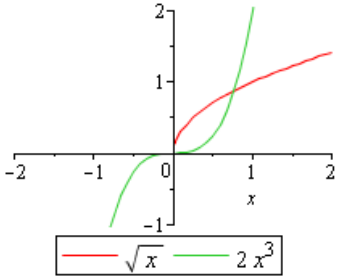
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy$$

Рисунок: https://3dstroyproekt.ru/dvojnoj-integral/opredelenie-dvojnogo-integrala

Пример: геометрический смысл определенного интеграла

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями.
Изобразить область на графике

```
> restart; f1 := sqrt(x) : f2 := 2*x^3 :
> with(plots) : plot([f1, f2], x = -2..2, -1..2, legend = [f1, f2])
```




```
> _EnvExplicit := true : solve([y = f1, y = f2], [x, y]); evalf(%)
```

$$\left[[x=0, y=0], \left[x=\frac{1}{2}\,2^{3/5}, y=\frac{1}{2}\,2^{4/5}\right], \left[x=\frac{1}{2}\,2^{3/5}\,(-1)^{4/5}, y=\frac{1}{2}\,2^{4/5}\,(-1)^{2/5}\right], \left[x=-\frac{1}{2}\,2^{3/5}\,(-1)^{1/5}, y=-\frac{1}{2}\,2^{4/5}\,(-1)^{3/5}\right]\right]$$

$$[[x=0., y=0.], [x=0.7578582835, y=0.8705505635], [x=-0.6131202305+0.4454579224\,I, y=0.2690149186+0.8279427860\,I], [x=-0.6131202305-0.4454579224\,I, y=0.2690149186-0.8279427860\,I]]$$

Способ 1: определенный интеграл и разность функций

```
> g := f1 - f2; int(g, x = 0..(1/2)*2^(3/5)); evalf(%)
```

$$g := \sqrt{x} - 2x^3$$

$$\frac{5}{24}\,2^{2/5}$$

$$0.2748974814$$

Способ 2: двойной интерграл

```
> int(int(1, y = 2*x^3..sqrt(x)), x = 0..(1/2)*2^(3/5)); evalf(%)
```

$$\frac{5}{24}\,2^{2/5}$$

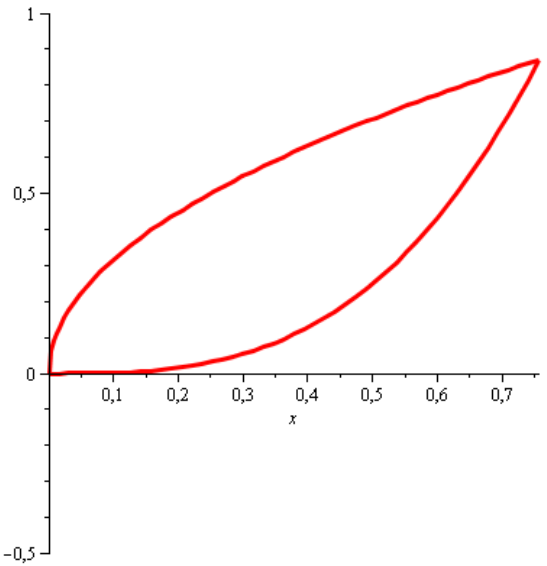
$$0.2748974814$$

```
> with(Student[MultivariateCalculus]) :
> MultiInt(1, y = 2*x^3..sqrt(x), x = 0..(1/2)*2^(3/5)); evalf(%)
```

$$\frac{5}{24}\,2^{2/5}$$

$$0.2748974814$$

```
> plot([f1, f2], x = 0..(1/2)*2^(3/5), -0.5..1, color = red, thickness = 3)
```

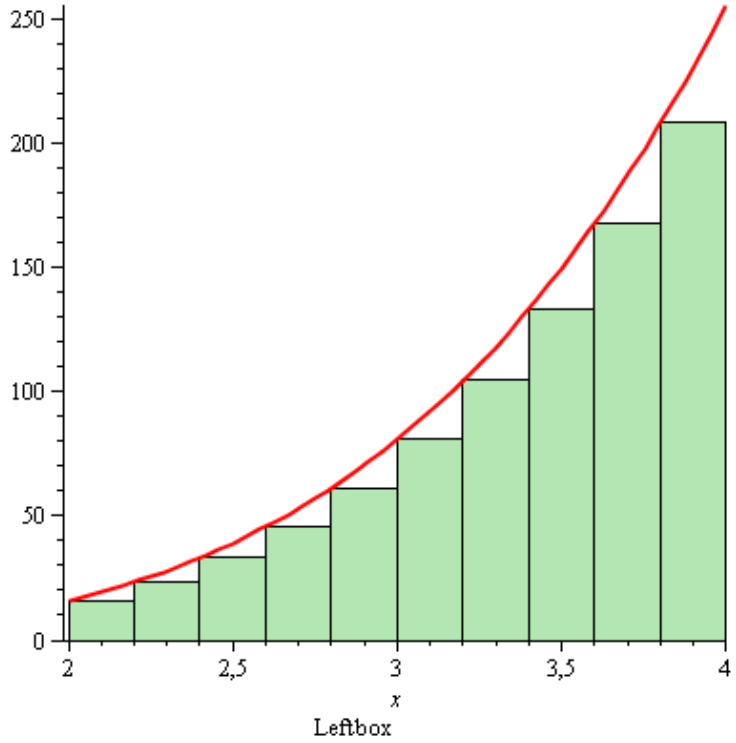


Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды устаревшего пакета student

- **leftbox(f(x), x=a..b, n, 'shading'=<color>, <plot options>)** – графическая аппроксимация интеграла в пределах от a до b с помощью левой Римановой суммы, n – число аппроксимирующих прямоугольников (необязательный параметр), shading – заливка прямоугольников
- **rightbox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью правой Римановой суммы
- **middlebox** – аналогичная аппроксимация интеграла с помощью средней Римановой суммы
- **leftsum(f(x), x=a..b, n)** – значение левой Римановой суммы
- **rightsum(f(x), x=a..b, n)** – значение правой Римановой суммы
- **middlesum(f(x), x=a..b, n)** – значение средней Римановой суммы

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой суммы (пакет student)

```
> with(student) : leftbox(x^4, x = 2 ..4, 10, color = RED, caption = "Leftbox");
  leftsum(x^4, x = 2 ..4, 10); evalf(%)
```

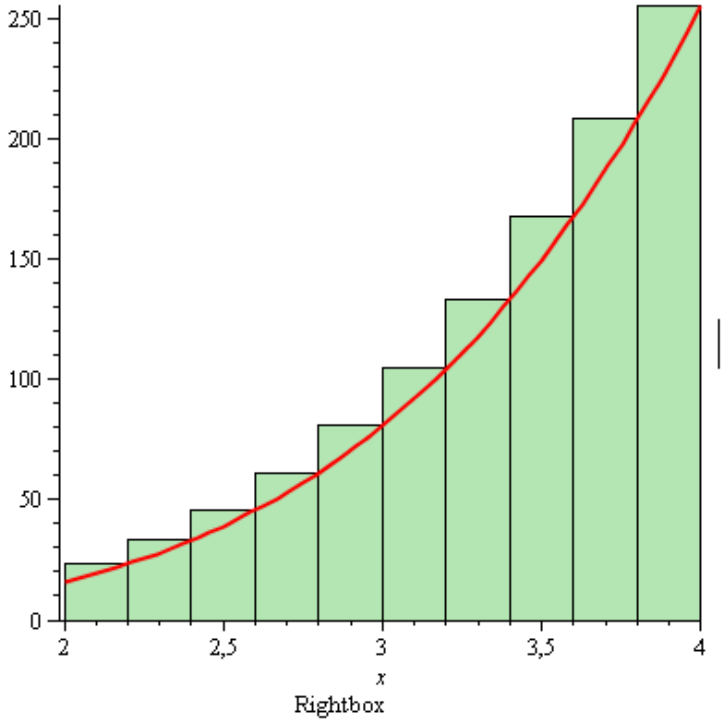


$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\left(2+\frac{1}{5}i\right)^4$$

175.1465600

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью правой суммы (пакет student)

```
> rightbox(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = "Rightbox"); rightsum(x^4, x = 2..4, 10);
  evalf(%)
```

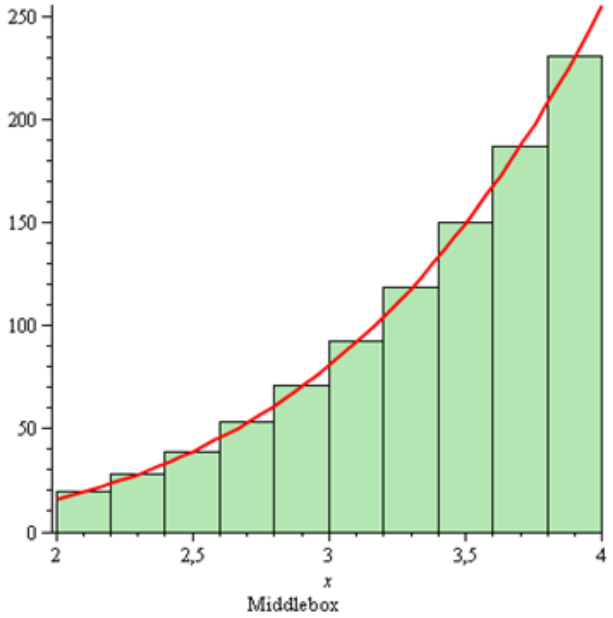


$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{10}\left(2+\frac{1}{5}i\right)^4$$

223.1465600

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет student)

```
> middlebox(x^4, x = 2..4, 10, color = RED, caption = "Middlebox"); middlesum(x^4, x = 2..4,
  10); evalf(%)
```



$$\frac{1}{5}\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{21}{10}+\frac{1}{5}i\right)^4$$

198.0267600

Увеличим число прямоугольников

```
> leftsum(x^4, x = 2..4, 1000) : evalf(%); rightsum(x^4, x = 2..4, 1000) : evalf(%)
```

198.1600747

198.6400747

Графическая аппроксимация определенного интеграла: команды пакета Student[Calculus1]

- **ApproximateInt(f(x), x = a..b, opts)**
- **ApproximateInt(f(x), a..b, opts)**
- **ApproximateInt(Int(f(x), x = a..b), opts)** – числовая или графическая (с опцией **output=plot**) аппроксимация интеграла в пределах интегрирования от a до b

Некоторые опции (подробнее см. в Help)

- **method = lower, upper, left, midpoint, right, trapezoid, simpson, simpson[3/8], boole, newtoncotes[posint], random** или **procedure** – метод аппроксимации интеграла (по умолчанию – средняя Риманова сумма)
- **output = value, sum, plot,** или **animation** – результат (по умолчанию – приближенное значение value)
- **partition = posint, list(algebraic), random[algebraic]** или **algebraic** – количество интервалов (прямоугольников), по умолчанию равно 10

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла (команды пакета Student[Calculus1])

```
> with(Student[Calculus1]):
> f := sin(x):
> int(f, x = 0..π);
```

$$2$$

Приближенное значение по умолчанию

```
> ApproximateInt(f, x = 0..π); evalf(%)
```

$$\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5}+\frac{3}{20}\pi\sqrt{2}+\frac{1}{10}\pi\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$2.008248408$$

Значение средней Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0..π, method = midpoint); evalf(%)
```

$$\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5}+\frac{3}{20}\pi\sqrt{2}+\frac{1}{10}\pi\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$2.008248408$$

Значение левой Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0..π, method = left); evalf(%)
```

$$\frac{1}{10}\pi+\frac{1}{10}\pi\sqrt{5}+\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$1.983523537$$

Значение правой Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0..π, method = right); evalf(%)
```

$$\frac{1}{10}\pi+\frac{1}{10}\pi\sqrt{5}+\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}+\frac{1}{20}\pi\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$

$$1.983523537$$

Значение верхней Римановой суммы

```
> ApproximateInt(f, x = 0..π, method = upper);
```

$$2.297682802$$

Значение нижней Римановой суммы

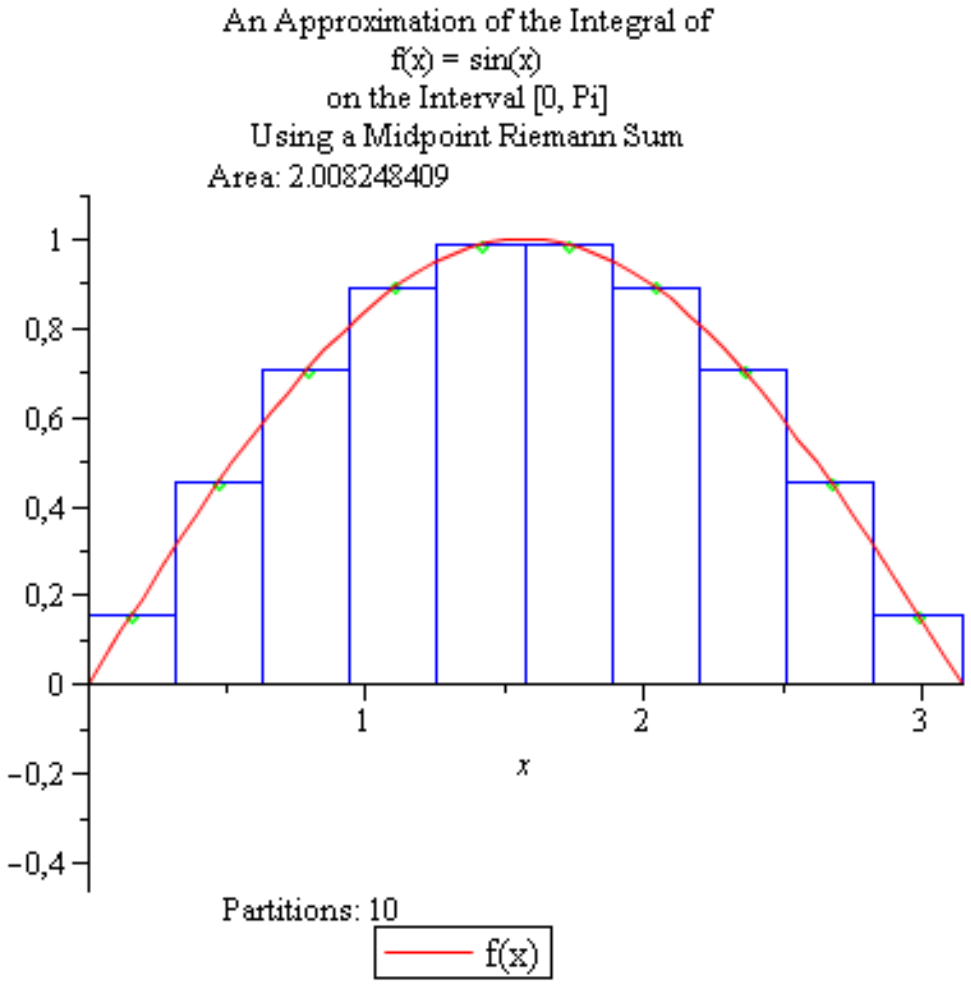
```
> ApproximateInt(f, x = 0..π, method = lower);
```

$$1.669364272$$

Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью средней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление средней Римановой суммы

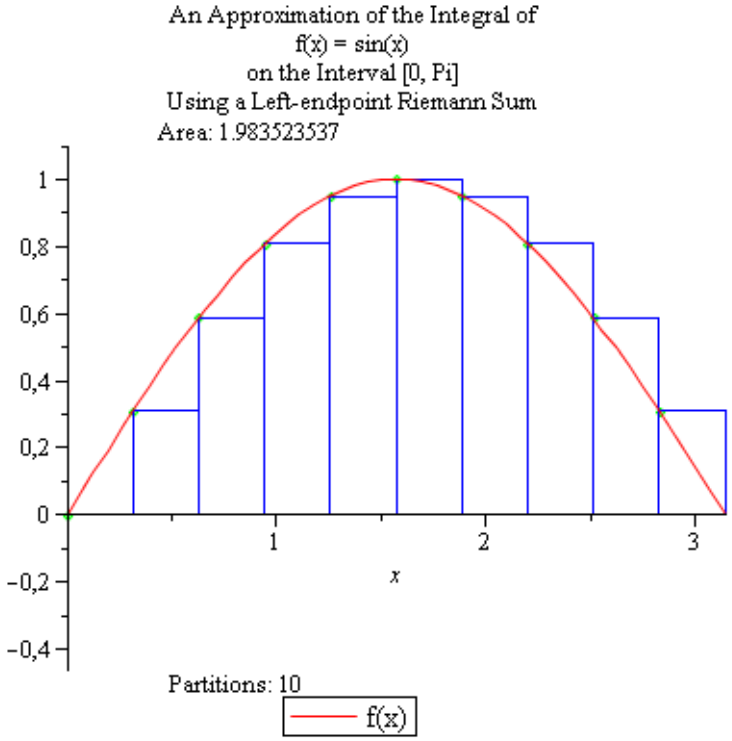
```
> ApproximateInt(f, x = 0 ..π, method = midpoint, output = plot)
```



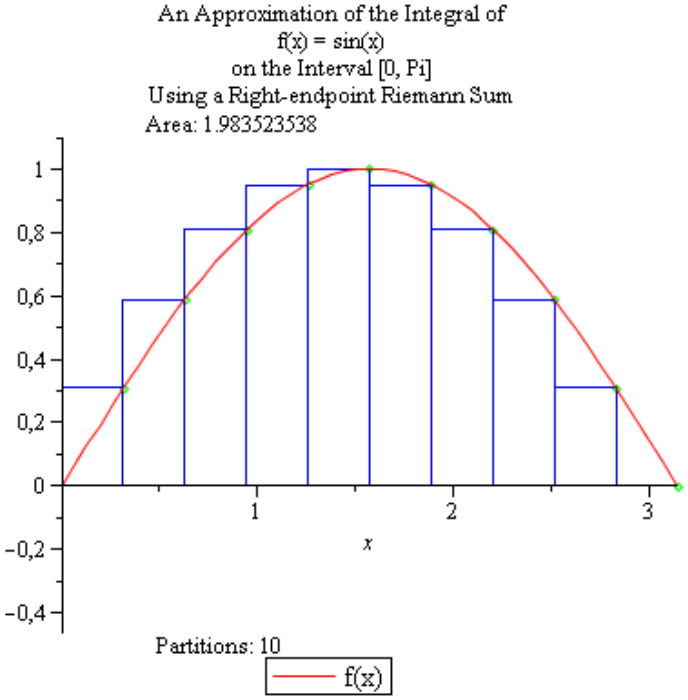
Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью левой и правой суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление левой и правой Римановых сумм

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = left, output = plot)$



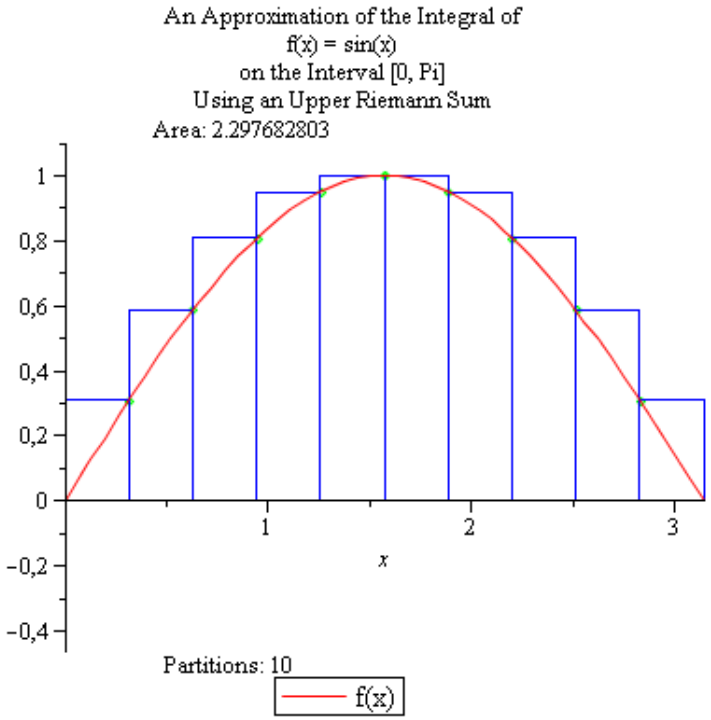
> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = right, output = plot)$



Примеры: графическая аппроксимация определенного интеграла с помощью верхней и нижней суммы (пакет Student[Calculus1])

Графическое представление верхней и нижней Римановых сумм

> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = upper, output = plot)$



> $ApproximateInt(f, x = 0..\pi, method = lower, output = plot)$

