Лабораторная работа №1
РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

1. Задача теплопроводности (температурный анализ)
2. Статический температурный анализ
3. Плоская задача

ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

В качестве примера рассмотрим стационарную задачу теплопроводности для двумерной области в виде латинской буквы «R». Геометрия области, отнесенной к декартовой системе координат Oxy, показана на рис. 1. Размеры буквы определяются следующими параметрами: HL=1.4 м (высота); WL=0.8 м (ширина); WWL=0.2 (ширина стенок); HAL=0.7 м (дополнительный размер по высоте). Материалом области является сталь с коэффициентом теплопроводности k= 46.7 (Вт/(м град)).

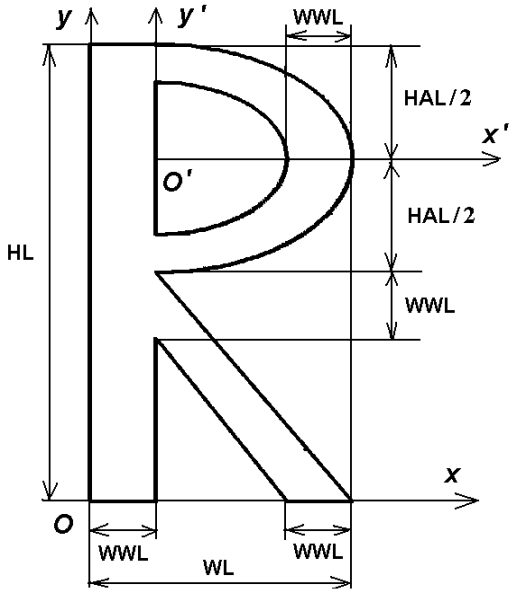


Рисунок 1. Схема области

В задаче требуется определить поле температур и вектор потока тепла в плоской области в форме буквы «R» при подаче на нижние грани заданных значений температуры и при задании на верхней грани условия конвективного теплообмена. Именно, предположим, что на левой нижней грани $0 \le x \le WWL$, $y = 0$, температура θ_h равна 90°C; а на правой нижней грани $WL - WWL \le x \le WL$,

$y = 0$, температура θ_h равна 180°C. На верхней грани $0 \le x \le WWL$, $y = HL$, имеем условие конвективного теплообмена со значениями коэффициента теплообмена 60 м$^{-1}$ и температурой внешней среды 0°C. Все остальные границы считаются теплоизолированными.

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Заметим, что при задании входных параметров задачи нужно заботиться об их согласованности по системам единиц. Здесь выбрана система единиц – СИ, и, таким образом, геометрические размеры даются в метрах.

Для построения области в виде буквы «R», отметим, что ее правая верхняя часть ограничена кривыми линиями, которые можно задавать отрезками эллипсов. Центр эллипсов будет совпадать с центров декартовой системы координат $O'x'y'$, сдвинутой относительно исходной системы координат Oxy на WWL вправо по оси абсцисс, и на (HL-HAL/2) вверх по оси ординат. Для внешней криволинейной части отношение полуосей эллипса по осям y' и x' равно: =(HAL/2)/(WL-WWL).

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Стационарное уравнение теплопроводности для области Ω относительно неизвестной функции температуры $\theta = \theta(x, y, z)$ в декартовой системе координат $Oxyz$ в отсутствие внешних источников тепла в тензорной форме имеет вид:

$$\nabla^T \cdot (-\underline{\underline{K}} \cdot \nabla\theta) = 0, \qquad (1)$$

где $\underline{\underline{K}}$ – симметричный тензор коэффициентов теплопроводности второго ранга, ∇ – векторный дифференциальный набла-оператор:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ & k_{yy} & k_{yz} \\ sym & & k_{zz} \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}, \quad \nabla^T = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}.$$

Величина $\underline{q} = -\underline{\underline{K}} \cdot \nabla\theta$ называется вектором потока тепла. В большинстве случае тензор $\underline{\underline{K}}$ является диагональным: $k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0$. Тогда координатном форме уравнение (1) можно записать в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yy}\frac{\partial\theta}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zz}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) = 0. \qquad (2)$$

Для изотропного материала $k_{xx} = k_{yy} = k_{zz} = k = const$. В тензорной форме имеем:

$$\nabla \cdot (-k \nabla \theta) = 0. \quad (3)$$

В координатном форме уравнение (3) будет иметь вид:

$$-k \Delta \theta = 0, \quad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Для уравнения теплопроводности обычно рассматриваются три основных типа граничных условий. Пусть граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω разбита на три части, где $\Gamma = \Gamma_\theta \cup \Gamma_q \cup \Gamma_c$

Если на части границы Γ_θ задана температура $\theta_\Gamma = \theta_\Gamma(x, y, z)$, то данное граничное условие называется главным граничным условием, граничным условием первого рода или условием Дирихле:

$$\theta\Big|_{\Gamma_\theta} = \theta_\Gamma, \quad (5)$$

Если на части границы Γ_q задан тепловой поток $q_\Gamma = q_\Gamma(x, y, z)$, то данное граничное условие называется естественным граничным условием, граничным условием второго рода или условием Неймана:

$$\underline{n} \cdot \underline{q}\Big|_{\Gamma_\theta} = -q_\Gamma, \quad (6)$$

где $\underline{n}$ – вектор внешней единичной нормали к границе $\Gamma = \partial\Omega$.

Для теплоизолированных границ нормальная компонента вектора потока тепла равна нулю:

$$\underline{n} \cdot \underline{q} = 0, \quad (7)$$

Если на части границы Γ_c задан конвективный теплообмен с коэффициентом h_f с окружающей средой температуры θ_{ext} $q_\Gamma = q_\Gamma(x, y, z)$, то данное граничное условие называется граничным условием третьего рода:

$$\underline{n} \cdot \underline{q} = -h_f(\theta_{ext} - \theta), \quad (8)$$

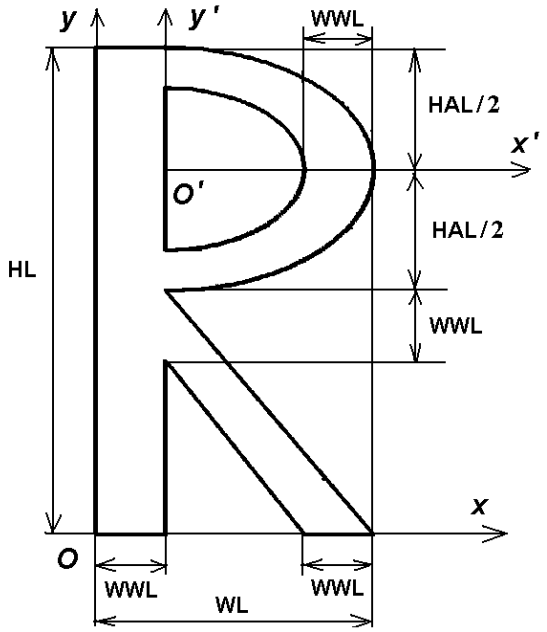


Рис. 1. Схема области

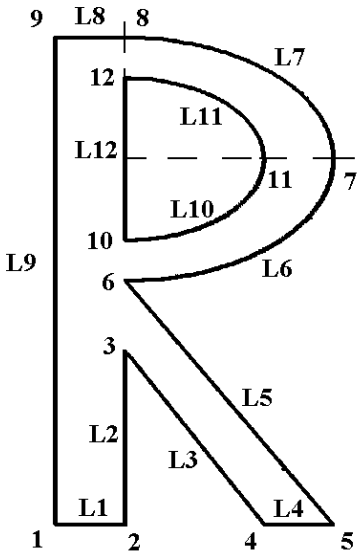


Рис. 2. Нумерация точек и линий

Решение задачи с использованием ANSYS

Для решения плоской стационарной задачи теплопроводности выберем шестиузловой треугольный температурный конечный элемент PLANE35 пакета ANSYS.

Будем строить сначала твердотельную модель, а затем, из нее – конечно-элементную. Твердотельную модель получим методом построения геометрических объектов «снизу – вверх». Для этого сначала построим опорные точки, потом – линии, и, наконец, двумерные области.

Опишем решение задачи с помощью *командного режима* ANSYS APDL (Ansys Parametric Design Language).

Нам понадобится сначала построить две односвязные области: первую область, ограниченную внешними линиями буквы «R», и вторую область, ограниченную внутренними линиями. Затем, с использованием булевской операции вычитания геометрических областей (команда **ASBA**) можно будет получить итоговую область буквы «R» с отверстием.

В соответствие с этой идеологией сначала, введя заголовок **/TITLE** (не обязательная процедура) и перейдя в препроцессор **/PREP7**, зададим идентификаторы:

```
/TITLE, Heat Flow in 2D region (R)
/PREP7

! Все величины в системе Си

! Геометрические размеры тела в форме буквы "R"
```

HL=1.4 ! Высота
WL=0.8 ! Ширина
WWL=0.2 ! Ширина стенок буквы "R"
HAL=0.7 ! Дополнительный размер по высоте

T_INP1=90 ! Температура на левой части нижней границе
T_INP2=180 ! Температура на правой части нижней границе
T_EXT=0 ! Температура окружающей среды для конвективных условий
T_EXT=0
H_F=60 ! Коэффициент конвективного теплообмена

Далее, определим материальные свойства. Для линейной стационарной задачи теплопроводности для изотропной однородной среды нужно только одно значение: коэффициент теплопроводности $K=K_{XX}$. Значение K_{XX} для стали поместим в набор материальных свойств под номером «1» по команде:
MP,KXX,1,46.7 ! Коэффициент теплопроводности KXX=46.7 (Сталь)

Зададим параметры триангуляции. Пусть есть один глобальный размер DMESH для конечных элементов, равный половины ширины стенок буквы (т.е. DMESH=WWL/2), и более мелкий размер DMESH1, в четыре раза меньший. Для определения этих величин введем соответствующие параметры:
! Параметры для триангуляции
DMESH=WWL/2
DMESH1=DMESH/4

Определим тип конечного элемента. Мы хотим разбить нашу область на конечные элементы одного типа: треугольные квадратичные температурные конечные элементы с шестью узлами PLANE35. Для этого поместим в первый номер типов элементов элемент PLANE35 по команде:
ET,1,PLANE35 ! Шестиузловой треугольный температурный КЭ PLANE35

Анализируя вид буквы «R», замечаем, что ее правая верхняя часть ограничена кривыми линиями, которые можно задавать отрезками эллипсов. Центр эллипсов будет совпадать с центров декартовой системы координат $O'x'y'$, сдвинутой относительно исходной системы координат Oxy на WWL вправо по оси абсцисс, и на (HL-HAL/2) вверх по оси ординат. Для внешней криволинейной части отношение полуосей эллипса по осям y' и x' равно: =(HAL/2)/(WL-WWL) . Поэтому, для дальнейшего построения криволинейных линий удобно определить новую эллиптическую систему координат под номером 11, введя команды:

PEL=(HAL/2)/(WL-WWL) ! Параметр эллиптичности для криволинейной части фигуры
LOCAL,11,1,WWL,HL-HAL/2,,,,,PEL ! Эллиптическая система координат 11
CSYS,0 ! Переход в основную декартову систему координат

Теперь создаем область, ограниченную внешними линиями буквы «R». Сначала создаем девять опорных точек:

```
! Определение основных опорных точек для внешней границы
K,1,0,0
K,2,WWL,0
K,3,WWL,HL-HAL-WWL
K,4,WL-WWL,0
K,5,WL,0
K,6,WWL,HL-HAL
K,7,WL,HL-HAL/2
K,8,WWL,HL
K,9,0,HL
```

Затем определяем линии по точкам. При этом для создания эллиптической линии просто переходим в эллиптическую систему координат, и в ней проводим «прямую» линию, которая в результате оказывается эллиптической. Команда **AL** в итоге позволяет создать нужную нам первую область A1:

```
!  создание линий по точкам
L,1,2 $ L,2,3  $ L,3,4 $ L,4,5 $ L,5,6
CSYS,11  ! Переход в систему координат с номером 11
L,6,7 $ L,7,8
CSYS,0 ! Переход в основную декартову систему координат
L,8,9 $ L,9,1
AL,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ! Определение площади 1 по линиям
```

Замечание. Область A1 можно было создать и по команде

```
A,1,2,3,4,5,6,7,8,9 ! Определение площади 1 по опорным точкам
```

Действительно, эта команда создает площадь (поверхность) по опорным точкам с проведением прямых линий между точками. Однако если между токами уже определены линии, то команда **A** использует их, и в результате оказывается эквивалентной команде **AL**.

Создавая другие области, нужно иметь в виду, что команда **AL** в командном режиме строит область максимум по десяти линиям, а команда **A** – максимум по восемнадцати точкам (если не используется значение ALL для первого поля). В интерактивном графическом режиме таких ограничений нет. Но если есть желание работать только в командном режиме с использованием APDL, то можно разбить сложную область на более простые подчасти с числом точек или линий, удовлетворяющих ограничениям команд **A** или **AL**. Со-

здав эти подобласти, нужную сложную область можно получить объединением подобластей. Можно их и не объединять в одну область, но тогда нужно проследить, чтобы граничащие подобласти имели одни и те же опорные точки и линии на соседствующих границах.

Действуя аналогично, построим вторую область – пустотелую часть буквы «R»:

```
! Определение отверстия - площади 2
K,10,WWL,HL-HAL/2-(WL-2*WWL)*PEL
K,11,WL-WWL,HL-HAL/2
K,12,WWL,HL-HAL/2+(WL-2*WWL)*PEL
CSYS,11
L,10,11 $ L,11,12
CSYS,0
L,12,10
AL,10,11,12
```

Теперь булевская операция вычитание позволяет из первой области вырезать вторую, и в результате получить требуемую область с отверстием, причем эта область будет иметь номер 3:

```
ASBA,1,2 ! Вырезать из области 1 область 2
```

В итоге создана твердотельная модель без граничных условий. Область под номером «3» соответствует планируемому виду буквы «R», и ей по умолчанию сопоставлены все атрибуты с номером «1», т.е. набор материальных свойств с номером «1», типы элементов с номером «1», и т.д. Команды **MP** и **ET**, введенные ранее, задали нужные нам значения для материальных свойств с номером «1» и типов элементов с номером «1».

Переход от твердотельной модели к конечно-элементной оказывается здесь совсем не сложным. Определив размеры конечных элементов вблизи опорных точек по командам **KESIZE**, получаем конечно-элементную модель из треугольных элементов PLANE35 по команде **AMESH**:

```
! Установка размеров элементов вблизи опорных точек
KESIZE,ALL,DMESH
KESIZE,3,DMESH1 $ KESIZE,6,DMESH1
KESIZE,10,DMESH1 $ KESIZE,11,DMESH1 $ KESIZE,12,DMESH1
AMESH,ALL ! Триангулировать область (3)
FINISH
```

В конце приведенного выше фрагмента по команде **FINISH** была завершена работа постпроцессора.

Полученная конечно-элементная модель показана на рис. 3 (команда **EPLOT** при некоторых опциях графического вывода, приведенных далее в постпроцессоре). Для вывода конечно-элементной сетки в интерактивном режиме следует выполнить: Plot->Elements.

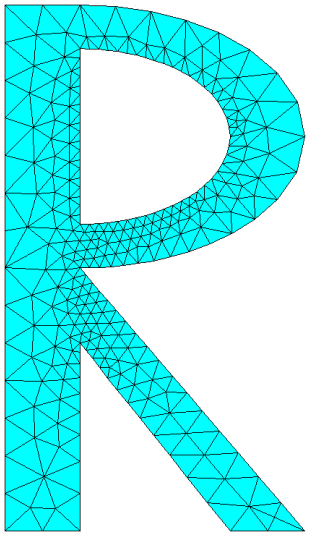


Рис. 3. Конечно-элементная модель

Следующим этапом является задание граничных условий и формирование и решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) МКЭ. Все эти действия выполним в решателе **/SOLU**.

Для задания граничных условий мы выделяет нужное множество узлов командами **NSEL**, а затем главные граничные условия для температуры задаем по команде **D**, а условия конвективного теплообмена – по команде **SF**. По окончанию этих процедур нужно не забыть вернуться к выбору всех узлов модели по команде **NSEL,ALL** .

По одной команде **SOLV**E происходит формирование элементных матриц, формирование СЛАУ МКЭ и собственно решение СЛАУ.

Блок нужных команд решателя в итоге выглядит так:

```
/SOLU
ANTYPE,STAT        ! Решение стационарной задачи
NSEL,S,LOC,Y,0     ! Выбор всех узлов с координатой Y=0
NSEL,R,LOC,X,0,WWL
D,ALL,TEMP,T_INP1      !  Задать  для  всех  выбранных  узлов
TEMP=T_INP1
NSEL,S,LOC,Y,0     ! Выбор всех узлов с координатой Y=0
NSEL,R,LOC,X,WL,WL-WWL
D,ALL,TEMP,T_INP2      !  Задать  для  всех  выбранных  узлов
TEMP=T_INP2
NSEL,S,LOC,Y,HL  ! Выбор всех узлов с координатой Y=HL
NSEL,R,LOC,X,0,WWL
```

SF,ALL,CONV,H_F,T_EXT ! Конвективный теплообмен в выбранных узлах
NSEL,ALL ! Вернуться к выбору всех узлов модели

SOLVE ! Решить СЛАУ МКЭ
SAVE,Heat_Letter_R,db ! Сохранить базу ANSYS задачи под именем Heat_Letter_R.db
FINISH

Отметим, что здесь по команде **SAVE,Heat_Letter_R,db** твердотельная и конечно-элементная модели задачи записываются в файл формата базы данных ANSYS *.db, и этому файлу назначено имя Heat_Letter_R.db.

Выведем получающуюся конечно-элементную сетку с граничными условиями (рис. 4). Для этого в интерактивном режиме следует выполнить: Plot->Elements, PlotCtrls->Symbols->Отметить All Applied BCs, в пункте Surface Load Symbols для отображения условий конвективного теплообмена задать вывод Convect FilmCoef:

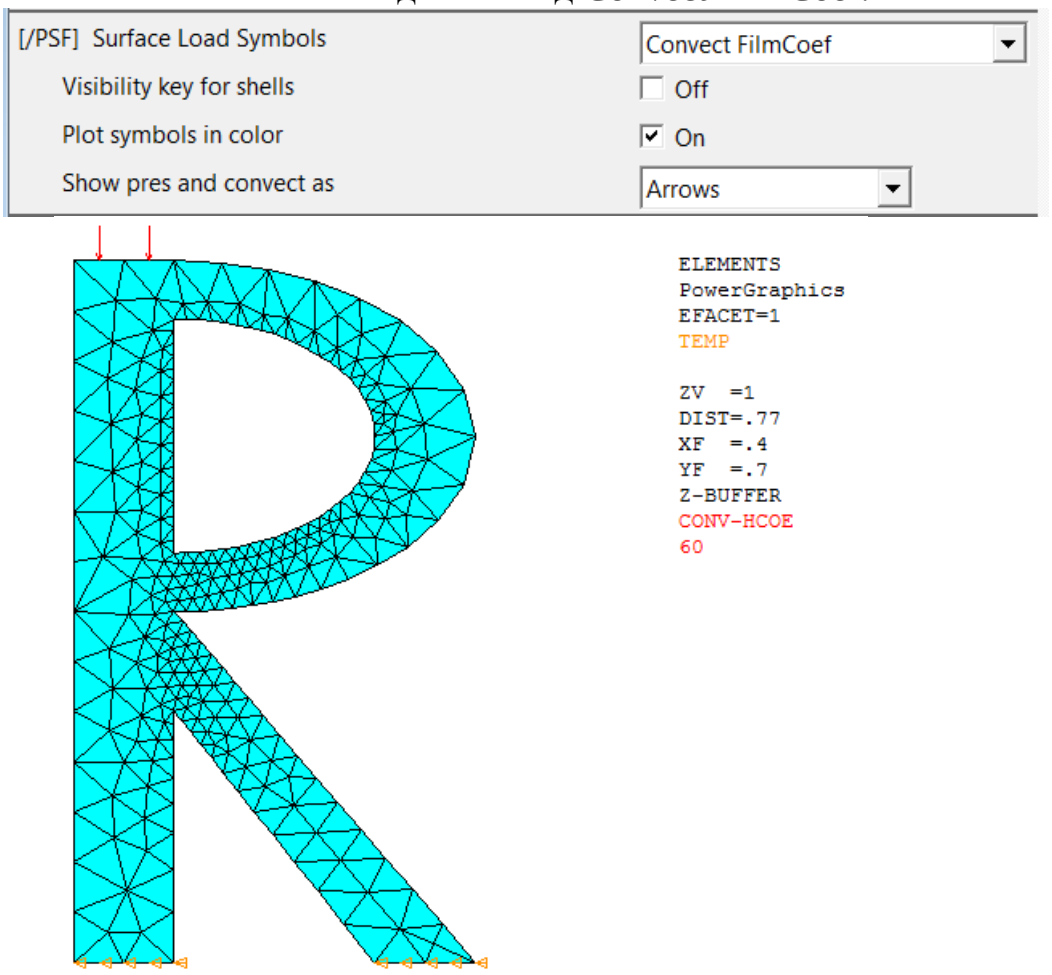


Рис. 4. Конечно-элементная сетка с граничными условиями

Остается просмотреть результаты, что можно сделать в пост-процессоре POST1:

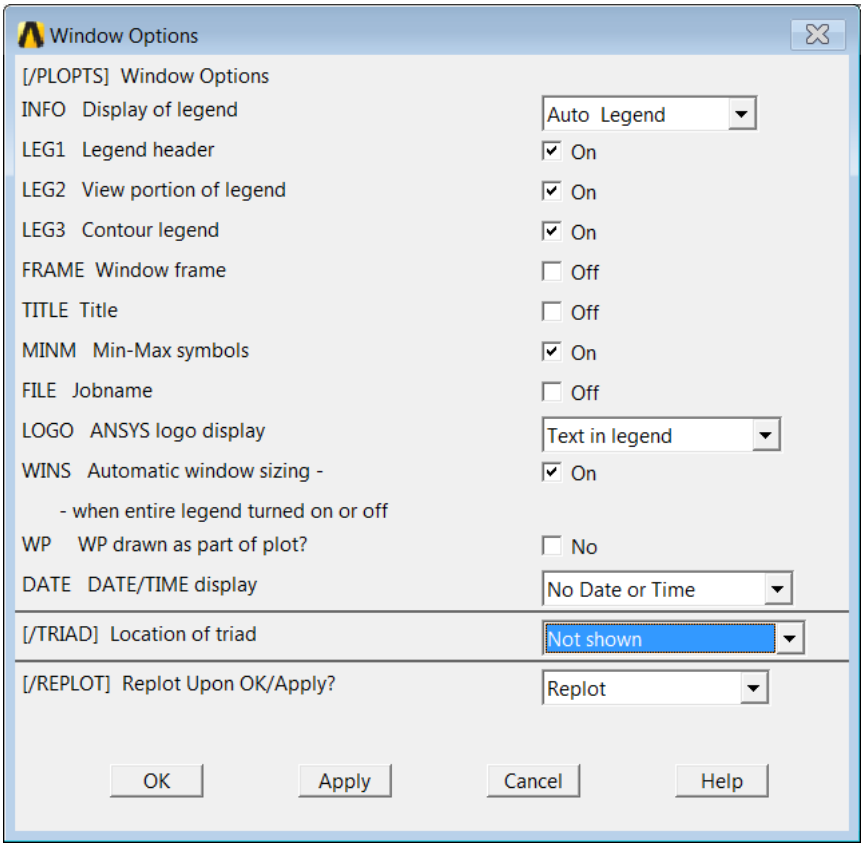
/POST1
! Команды, управляющие форматом графического вывода
/SHOW,WIN32C

Данная команда задает вид графического устройства (здесь contours WIN32) и позволяет изменить количество отображаемых цветов в цветовой шкале. По умолчанию используется x11. Интерактивный режим : PlotCtrls->Device Options.

Следующий блок команд задает опции графического вывода в окне

/TRIAD,OFF ! Не показывать начала координат и осей
/PLOPTS,INFO,2 ! Использовать формат вывода Auto-legend для подписей
/PLOPTS,LEG2,OFF
/PLOPTS,LOGO,OFF ! Логотип ANSYS не показывать в графическом виде
/PLOPTS,FRAME,OFF ! Не показывать рамку
/PLOPTS,TITLE,OFF ! Не показывать заголовок
/PLOPTS,MINM,ON
/PLOPTS,DATE,OFF ! Не показывать дату

В интерактивном режиме PlotCtrls->Window Ctrls->Window Options. Здесь можно указать зада the legend, Ansys logo, window frame, title , date and time, triad, etc.



Следующая команда позволяет задать количество цветов в цветовой шкале (Интерактивный режим: PlotCtrls->Style->Contours->Uniform contours->Number of contours)

! Для показа распределений величин использовать 14 градаций уровней
/CONT,,14

Для конвертации черного и белого используются команды (в интерактивном режиме: PlotCtrls->Style->Colors->Reverse video)

! Инвертирование фона с черного на белый
/RGB,INDEX,100,100,100,0
/RGB,INDEX,0,0,0,15

Далее зададим команды для отображения граничных условий (в интерактивном режиме: PlotCtrls->Symbols->All applied BCs)

/PBC,TEMP,,1 ! Отображать граничные условия для температуры
/PSF,CONV,HCOEF,2 ! Отображать стрелками граничные условия с коэффициентом теплообмена

Собственно вывод распределения поля температуры осуществляется по последней команде

PLNSOL,TEMP ! Показать поле температуры

Для вывода распределение температуры в интерактивном режиме ANSYS следует выполнить вход в General Postprocessor: General Postproc->Plot Results->Contour Plot->Nodal Solu->DOF Solution-> Nodal Temperature.

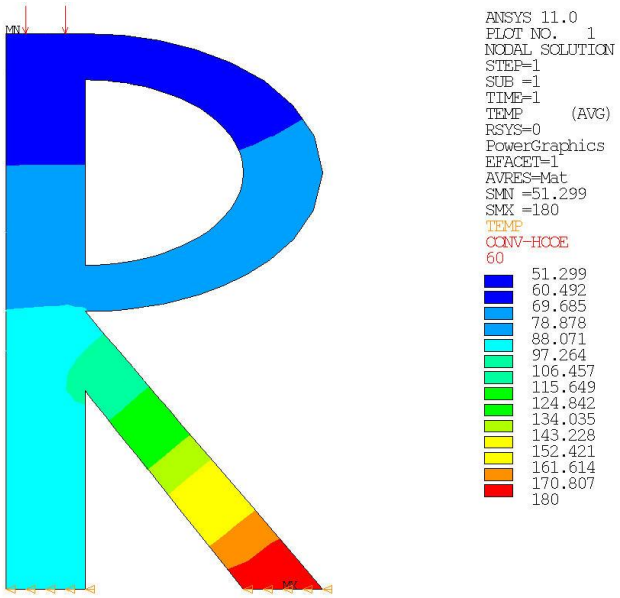


Рис. 5. Распределение температуры (с изображением граничных условий)

Из рис. 5 находим, что на верхней границе области с условием конвективного теплообмена получаются минимальные значения температуры θ_h, приближенно равные 51°C.

В постпроцессоре **/POST1** можно вывести и другие характеристики решения, например, модуль вектора потока тепла. Для этого можно воспользоваться командами:

/PBC,TEMP,,0 ! Не показывать граничные условия для температуры
/PSF,CONV,HCOEF,0 ! Не показывать граничные условия с коэффициентом теплообмена
PLNSOL,TF,SUM ! Показать модуль вектора теплового потока

Или в интерактивном режиме: General Postproc->Plot Results->Contour Plot->Nodal Solu->Thermal flux->Thermal flux vector sum.

В результате получим картинку распределений значений модуля вектора потока тепла (рис. 6)

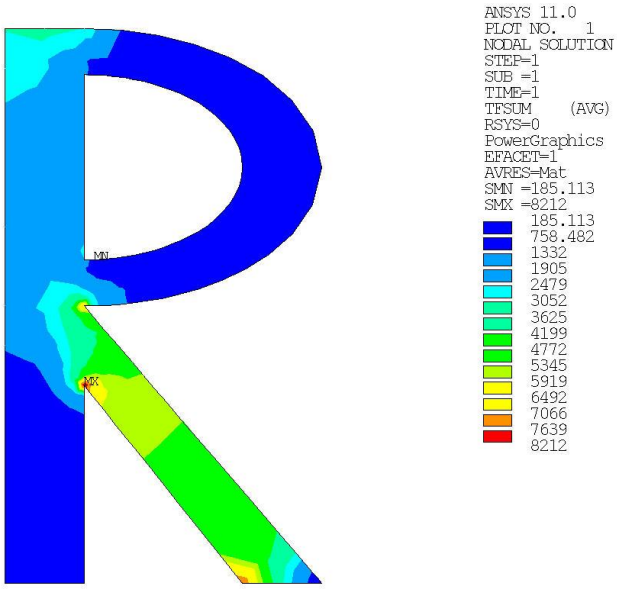


Рис. 6. Распределение модуля вектора потока тепла

Как видно из рис. 6, вектор потока тепла имеет экстремумы в угловых точках.

На рис. 7 показано распределение вектора потока тепла (General Postproc->Plot Results->Vector Plot->Predefined->Flux&gradient->Thermal flux TF.

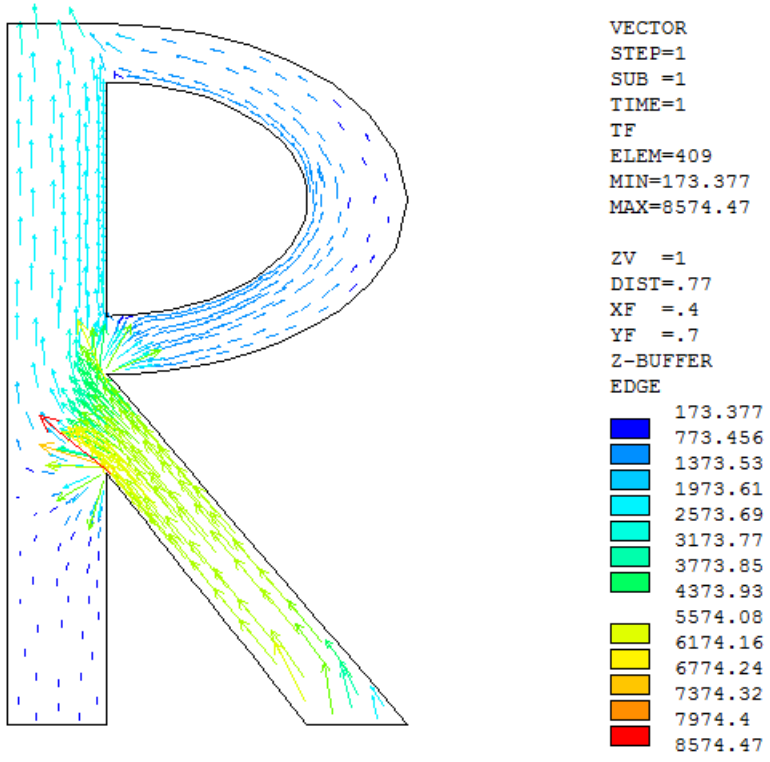


Рис. 7. Распределение вектора потока тепла

Суммарный командный файл на языке APDL ANSYS называется Th2LS_1.inp

Решение задачи с использованием FlexPDE

Входной файл для программы FlexPDE называется Th2LS_1.pde. С помощью этого входного файла можно получить аналогичные результаты во FlexPDE: